# Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **9. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Oskar selgitas välja, et ümbruskonnas on haukuvaid koeri, kes ei hammusta, kolm korda rohkem kui hammustavaid koeri, kes ei haugu, ning haukuvate koerte osakaal hammustavate koerte hulgas on kaks korda suurem hammustavate koerte osakaalust haukuvate koerte hulgas. Veel leidis Oskar, et selliste koerte arv, kes nii hauguvad kui ka hammustavad, on 40% võrra väiksem nende koerte arvust, kes ei haugu ega hammusta.

Mitu protsenti Oskari ümbruskonna koertest hauguvad, kuid ei hammusta?

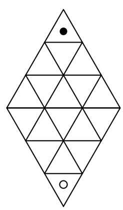
**2.** Kolmnurga $ABC$ külgedel $AC$ ja $BC$ valitakse vastavalt punktid $F$ ja $E$ nii, et $2|CF| = |FA|$ ja $2|CE| = |EB|$. Kiirtel $AE$ ja $BF$ valitakse vastavalt punktid $K$ ja $L$ väljaspool kolmnurka $ABC$ nii, et $2|KE| = |EA|$ ja $2|LF| = |FB|$. Tõesta, et nelinurk $ABKL$ on rööpkülik.

**3.** Nimetame naturaalarvu $m$ *maagiliseks*, kui arvu $m$ numbrite summa on võrdne tema numbrite korrutisega.

a) Näita, et iga $n = 1, 2, \ldots, 10$ korral leidub täpselt $n$-kohaline maagiline naturaalarv.

b) Tõesta, et iga naturaalarvu $n$ korral leidub maagiline naturaalarv, mis on vähemalt $n$-kohaline.

**4.** Kahest võrdkülgsest kolmnurgast koosnev romb küljepikkusega $n$ on jaotatud võrdkülgse kolmnurga kujulisteks mänguväljadeks küljepikkusega 1 (joonisel $n = 3$). Jukul ja Mikul on kummalgi üks nupp, mis mängu algul paiknevad üks ülemisel ja teine alumisel äärmisel väljal. Igal käigul liigutab mängija oma nupu väljalt, kus ta parajasti on, mõnele sellega ühist külge omavale väljale. Kui sellel väljal on vastase nupp, võtab mängija selle laualt ära ja on võitnud. Kui seda ei juhtu, siis võidab mängija, kes esimesena jõuab oma nupuga väljale, kus algul oli tema vastase nupp. Käiakse kordamööda, alustab Juku. Kas kellelgi mängijatest leidub võitev strateegia (st see mängija saab võita vastase suvalise vastumängu korral) ning kui jah, siis kellel?



**5.** Leia kõik positiivsete täisarvude paarid $(m, n)$, mille korral ruudustikus mõõtmetega $m \times n$ on ühikruute, mis piirnevad vähemalt ühe äärega, täpselt sama palju kui ülejäänud ühikruute.

# Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **10. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Olgu kolmnurga nurkade suurused $x$, $y$, $z$ kraadi.

a) Tõesta, et kui $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ on kõik ratsionaalarvud, siis $x$, $y$, $z$ on kõik ratsionaalarvud.

b) Tõesta, et kui arvudest $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ täpselt üks on ratsionaalarv, siis $x$, $y$, $z$ on kõik irratsionaalarvud.

**2.** Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud $(x, y, z)$, mille korral

$$99x + 100y + 101z = 2009.$$

**3.** Teravnurkse kolmnurga $ABC$ küljele $AB$ tõmmatakse punktis $B$ ristsirge $y$ ning küljele $AC$ punktis $C$ ristsirge $z$. Tõesta, et sirgete $y$ ja $z$ lõikepunkt asub tipust $A$ küljele $BC$ tõmmatud ristsirgel parajasti siis, kui $|AB| = |AC|$.

**4.** On antud ruudustik mõõtmetega $n \times 2$, kus $n > 1$. Küljed pikkusega 2 kleebitakse kokku, nii et tekib silindri külgpind. Mari ja Jüri mängivad mängu, milles kumbki lõikab oma käigul sellest pinnast ühe algse ühikruudu välja. Käiakse kordamööda, alustab Mari. Mängija, kelle käigu tagajärjel pinna ringühendus katkeb, kaotab (ruutude kokkupuutumist ainult tippupidi ei loeta ühenduseks). Kummal mängijatest leidub võitev strateegia (st see mängija saab võita vastase suvalise vastumängu korral)?

**5.** Õpetaja andis Arnole ülesande valida arvu $2009^{10}$ positiivsete tegurite seast mõned välja nii, et ükski valitud arv ühegi teise valitud arvuga ei jaguks. Mitu tegurit saab Arno maksimaalselt välja valida?

# Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **11. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Positiivne täisarv $n$ on selline, et nii $n-1$ kui ka $n+1$ on algarvud, kusjuures $n > 18$. Tõesta, et arv $n$ jagub vähemalt 8 erineva positiivse täisarvuga.

**2.** Leia kõik reaalarvud $k$, mille korral kehtib järgmine väide: alati, kui reaalarvud $a$ ja $b$ rahuldavad tingimusi $0 \leqslant a \leqslant 1$ ja $0 \leqslant b \leqslant 1$, siis

$$0 \leqslant a + b - kab \leqslant 1.$$

**3.** Olgu $ABCD$ selline kumer nelinurk, et nurk $BAC$ on kaks korda suurem nurgast $ACD$ ning nurk $DAC$ on kaks korda suurem nurgast $ACB$. Tõesta, et kui $|AB| = |AD|$, siis ka $|BC| = |DC|$.

**4.** Ruut mõõtmetega $n \times n$ jaotatakse ühikruutudeks, mis nummerdatakse mingis järjekorras arvudega 1 kuni $n^2$, kirjutades järjekorranumbrid vastavatesse ruutudesse. Osutub, et igas neist ühikruutudest koosnevas ristkülikus on ühe vastasnurkade paari juures nurgaruutudes olevate arvude summa võrdne teise vastasnurkade paari juures olevate arvude summaga. Leia kõik võimalused, milline saab olla $n \times n$ ruudu ühe diagonaali poolt läbitavatesse ühikruutudesse kirjutatud arvude summa.

**5.** Nimetame koordinaattasandi punkti *ratsionaalseks*, kui tema mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud, ning *irratsionaalseks*, kui tema mõlemad koordinaadid on irratsionaalarvud.

a) Kas tasandi iga punkt asub mingi kahe ratsionaalse punkti poolt määratud sirgel?

b) Kas tasandi iga punkt asub mingi kahe irratsionaalse punkti poolt määratud sirgel?

# Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **12. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Suure kera sisse paigutatakse neli ühesuurust väikest kera nii, et igaüks neist puutub kolme ülejäänut ja suurt kera. Kas väikeste kerade koguruumala on võrdne neist ülejääva osaga suure kera ruumalast, sellest suurem või väiksem?

**2.** Olgu $n$ mittenegatiivne täisarv, mille korral

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n}$$

on täisarvu ruut. Tõesta, et $n$ jagub $4$-ga.

**3.** Leia kõik sellised reaalarvud $a$, mille korral võrrandil

$$x^3 + ax - 2(a+4) = 0$$

on täpselt kaks erinevat reaalarvulist lahendit.

**4.** Tõesta, et rööpküliku diagonaalide pikkuste suhe on võrdne külgede pikkuste suhtega parajasti siis, kui diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed rööpküliku sisenurkadega.

**5.** Ristkülikukujulisest ruudustikust lõigatakse välja mõned ruudud nii, et koos iga väljalõigatava ruuduga lõigatakse välja ka kõik ruudud, mis asuvad temast ülalpool samas või mõnes parempoolses veerus ning temast paremal samas reas. Seejärel kirjutatakse igasse järelejäänud ruutu arv, mis näitab, mitu järelejäänud ruutu on kokku temast ülalpool samas veerus ja temast paremal samas reas. Tõesta, et ruute, kuhu kirjutatakse paarisarv, on vähemalt sama palju kui ruute, kuhu kirjutatakse paaritu arv.