LV Олимпиада Эстонии по математике

29 марта 2008 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. По железной дороге, соединяющей города A и B, поезд едет с максимальной скоростью, за исключением двух участков, на которых поезд должен снижать скорость по причине их плохого состояния. Если отремонтировать любой один из этих участков, то средняя скорость поезда между городами A и B увеличится на одну треть. На сколько увеличится средняя скорость поезда между городами A и B, если отремонтировать оба участка?

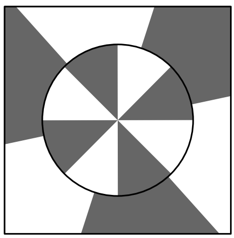
2. Найти все возможности, чему может равняться $\overline{abc} \cdot (a + b + c)$, если $\overline{bca} = (a + b + c)^3$ и $b \neq 0$. (Запись $\overline{xyz}$ обозначает число с цифрами x, y, z.)

3. а) Окружности c_1 и c_2 касаются внешне в точке A, окружности c_2 и c_3 касаются внешне в точке B, а окружности c_3 и c_1 касаются внешне в точке C. Всегда ли, когда треугольник ABC равносторонний, радиусы окружностей c_1, c_2 и c_3 равны?

б) Окружности c_1 и c_2 касаются внешне в точке A, окружности c_2 и c_3 касаются внешне в точке B, окружности c_3 и c_4 касаются внешне в точке C, а окружности c_4 и c_1 касаются внешне в точке D. Всегда ли, когда четырёхугольник $ABCD$ квадрат, радиусы окружностей c_1, c_2, c_3 и c_4 равны?

4. Каждая грань куба разделена на $n \times n$ одинаковых квадратов. Можно ли провести в каждом таком квадрате по одной диагонали так, что из всех проведенных диагоналей образуется одна замкнутая линия, ни через одну точку не проходящая более одного раза?

5. Вращающаяся сцена театра разделена лучами, исходящими из центра X, на $2n + 2$ равных сектора, где n — положительное целое число (на рисунке $n = 3$). Секторы раскрашены поочерёдно в чёрный и белый цвет. Неподвижный пол, расположенный за пределами сцены, разделён лучами, исходящими из центра X, на $2n$ равных по величине угла сектора, которые также раскрашены поочерёдно в чёрный и белый цвет. Доказать, что независимо от угла поворота вращающейся сцены на ней всегда найдётся по крайней мере один сектор, полностью расположенный напротив сектора пола такого же цвета.



LV Олимпиада Эстонии по математике

29 марта 2008 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все тройки (a, b, c) действительных чисел, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} ab - 1 = c \\ bc - 1 = a \\ ca - 1 = b. \end{cases}$$

2. На шахматной доске размерами 8×8 на каждой клетке первого ряда находится белый ферзь, а на каждой клетке последнего ряда находится чёрный ферзь. Одним ходом можно подвинуть одного ферзя (любого цвета) на любое число клеток в одном направлении (по вертикали, горизонтали или диагонали) на свободную клетку, если при этом он не перепрыгивает через какого-либо другого ферзя. Каково наименьшее число ходов, за которое можно поменять местами белые и чёрные ферзи (порядок расположения ферзей одного цвета может при этом измениться)?

3. Окружности c_1 и c_2 с центрами соответственно O_1 и O_2 пересекаются в точке P. Отрезок O_1O_2 и окружность c_2 пересекаются в точке A. Доказать, что окружность, касающаяся окружности c_1 в точке P и отрезка O_1O_2 в точке A, существует тогда и только тогда, когда $\angle O_1PO_2 = 90^\circ$.

4. Можно ли выбрать на плоскости 5 различных точек так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках прямоугольные, а также

а) никакие четыре выбранные точки не лежат на одной прямой;

б) никакие три выбранные точки не лежат на одной прямой?

5. На пустую доску записывают сначала числа 1 и 2. Затем на каждом ходу выбирают какие-то уже записанные на доске числа m и n (может быть и $m = n$) и записывают на доску дополнительно число $mn + m + n$. Можно ли при помощи конечного числа таких ходов записать на доске число 2008?

LV Олимпиада Эстонии по математике

29 марта 2008 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Каковы размеры наименьшей по площади пластины прямоугольной формы, которую можно разрезать на две или большее количество частей квадратной формы, длины сторон которых целые числа, а наименьшая из них представлена только в одном экземпляре?

2. Найти все пары (a, b) положительных целых чисел, при которых

$$2^a - 3^b + 1 = 0.$$

3. Окружности c_1 и c_2 с разными радиусами касаются друг друга внешне в точке K. Общая внешняя касательная окружностей касается их соответственно в точках A и C. В окружностях проведены диаметры AB и CD. Прямая BD пересекает окружность c_1 второй раз в точке L, а окружность c_2 — в точке M. Доказать, что треугольники AKL и BKM подобны.

4. Доказать, что при любых действительных числах a, b и c выполняется неравенство

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geqslant 3ab + 4bc + 2ca.$$

Когда справедливо равенство?

5. Найдётся ли такой выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, что описанные окружности треугольников ABC, CDE и EFA пересекаются внутри шестиугольника в одной точке?

LV Олимпиада Эстонии по математике

29 марта 2008 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наименьшее возможное значение выражения $(1+u^2)(1+v^2)$, где u и v — действительные числа, для которых $u+v=1$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняется $|AB|=|BC|=|CD|$. Диагонали четырёхугольника AC и BD пересекаются в точке O. Доказать, что описанные окружности треугольников AOB и COD касаются тогда и только тогда, когда AC и BD перпендикулярны.

3. Все положительные целые числа, меньшие натурального числа n и взаимно простые с ним, складывают в возрастающем порядке. Сколько раз после прибавления очередного числа возникнет сумма, делящаяся на n, если

а) n — нечётное простое число;

б) n — квадрат нечётного простого числа?

4. Дана точка A, не проходящая через неё прямая l и расположенная на прямой точка X. Доказать, что если на прямой l найдётся такая точка Z_1, что длины всех сторон треугольника AXZ_1 — рациональные числа, то на прямой l найдутся ещё две точки Z_2 и Z_3, при которых все длины сторон треугольников AXZ_2 и AXZ_3 — рациональные числа.

5. На вертикальную стену прикреплено конечное число тоненьких прямых палочек, которые не касаются друг друга. При отпускании палочки она падает вдоль стены прямо вниз, оставаясь всё время параллельной своему начальному положению. Доказать, что найдётся палочка, которая при отпускании (все остальные палочки остаются на месте) упадёт на пол, не встретив по ходу движения препятствий со стороны какой-либо другой палочки.