Lahendused

1. *Vastus:* 2 korda.

Olgu t aeg, mis kulub rongisõiduks A ja B vahel, kui mõlemad probleemsed lõigud on remontimata. Kui esimene lõik remonditaks, suureneks keskmine kiirus $\frac{1}{3}$ võrra ehk $\frac{4}{3}$ korda ning rongisõiduks kuluks aega $\frac{3}{4}t$. Seega esimese lõigu remontimine annab ajavõidu $\frac{1}{4}t$. Esimese asemel teise lõigu remontimine annab samuti ajavõidu $\frac{1}{4}t$. Mõlema lõigu remontimine annab järelikult ajavõidu $\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t = \frac{1}{2}t$. Rongi keskmine kiirus suureneks siis 2 korda.

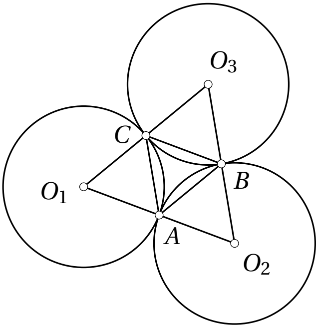
2. *Vastus:* 2008.

Arv $\overline{bca}$ on kolmekohaline täiskuup. Sellised on $125 = 5^3$, $216 = 6^3$, $343 = 7^3$, $512 = 8^3$ ja $729 = 9^3$. Ainult arvu 512 puhul kehtib võrdus $\overline{bca} = (a+b+c)^3$. Järelikult $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$ ning $\overline{abc} \cdot (a+b+c) = 251 \cdot (2+5+1) = 2008$.

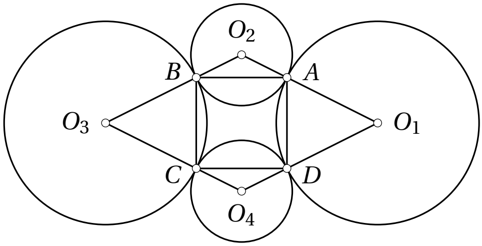
3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Olgu O_1, O_2, O_3 vastavalt ringjoonte c_1, c_2, c_3 keskpunktid (joonis 1). Kolmnurgad O_1CA, O_2AB ja O_3BC on võrdhaarsed, sest igaühe kaks külge on ringjoone raadiused. Olgu $\angle O_1CA = \angle O_1AC = \alpha$, $\angle O_2AB = \angle O_2BA = \beta$ ja $\angle O_3BC = \angle O_3CB = \gamma$. Eeldame, et kolmnurk ABC on võrdkülgne, tema nurgad on siis kõik 60°. Et $\angle O_1AC + \angle CAB + \angle O_2AB = 180^\circ$, siis $\alpha + 60^\circ + \beta = 180^\circ$, millest $\alpha + \beta = 120^\circ$. Analoogiliselt $\beta + \gamma = 120^\circ$ ja $\gamma + \alpha = 120^\circ$. Liites kolm viimast võrdust ja jagades tulemuse pooli 2-ga, leiame $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Lahutades sellest võrdusest ükshaaval eelmised võrdused, saame $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. Seega on kolmnurgad O_1CA, O_2AB, O_3BC võrdkülgsed ja kolmnurga ABC võrdkülgsuse tõttu võrdsed.

b) Valime ringjoonte keskpunktid $O_1(6;0)$, $O_2(0;3)$, $O_3(-6;0)$, $O_4(0;-3)$ (joonis 2). Nelinurk $O_1O_2O_3O_4$ on romb ning punktid $A(2;2)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-2)$, $D(2;-2)$, mis moodustavad ruudu, asuvad tema külgedel. Joonistame rombi iga tipu kui keskpunkti ümber ringjoone, mis läbib kahte lähimat ruudu tippu. Need ringjooned puutuvad üksteist väliselt punktides A, B, C, D, aga ei ole võrdse raadiusega, sest näiteks $|O_1A| \neq |O_2A|$.



Joonis 1



Joonis 2

4. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Väikeste ruutude tippe asub kuubi tippudes 8, servadel veel $12(n-1)$ ja tahkude sisepiirkondades $6(n-1)^2$, kokku on neid tippe seega $8 + 12(n-1) + 6(n-1)^2 = 6n^2 + 2$. Et kuubi igal tahul on n^2 väikest ruutu, siis läbib otsitav murdjoon $6n^2$ väikese ruudu diagonaalid ja seega ka $6n^2$ tippu. Järelikult leidub väikese ruudu tipp, mida murdjoon ei läbi. See tipp on ühine kas 3 või 4 väikesele ruudule. Nendel ruutudel peavad diagonaalid olema valitud nii, et nad vaadeldavat tippu ei läbi, aga siis moodustavad nad ümber selle tsükli. Sel juhul läbiks murdjoon mõnda tippu korduvalt, mis ei ole võimalik.

Lahendus 2. Värvime kõik punktid, mis on vaadeldavate väikeste ruutude tippudeks, malekorras kahe värviga (st punaseks, kui koordinaatide summa on paaris, ja siniseks, kui paaritu). Siis iga diagonaali otspunktid on sama värvi. Seega saab murdjoon läbida ainult ühte värvi tippe. Murdjoon läbib $6n^2$ tippu. Kuubi tahkudel ja tema sisemuses on $(n+1)^3$ täisarvuliste koordinaatidega punkti, sisemuses sealhulgas $(n-1)^3$. Seega tahkudel on tippe kokku $(n+1)^3 - (n-1)^3 = 6n^2 + 2$. Järelikult peavad $6n^2 + 2$ tipust $6n^2$ olema ühte värvi. See on võimatu, sest juba kahel naaberruudul on kokku 3 ühte ja 3 teist värvi tippu.

Märkus. Loobudes nõudest, et murdjoon peab läbima iga punkti ülimalt ühe korra, aga säilitades nõude, et ta peab läbima iga diagonaali täpselt üks kord, saab kõikidele ruutudele diagonaalid tõmmata parajasti siis, kui n on paarisarv.

5. *Lahendus 1.* Vaatleme pöördlava keskpunktist lähtuvaid kiiri, mis jaotavad pöördlava $2n + 2$ sektoriks. Et ülejäänud põrand on jaotatud $2n$ sektoriks, siis leidub kaks naaberkiirt, mis kuuluvad samasse põrandasektorisse. Kui nende kahe kiire vahele jääv pöördlava sektor on põrandasektoriga sama värvi, siis on otsitav sektor leitud. Kui aga värvid on erinevad, siis sobib otsitavaks vaadeldava sektoriga lava pöördekeskpunkti suhtes sümmeetriline sektor. See asub tervenisti esialgse põrandasektoriga sümmeetrilise sektori koosseisus, kuid vaatesuuna pööramisel 180° võrra muutub pöördlava sektori värv $n+1$ korda, põrandasektori värv aga n korda, mistõttu uute sektorite värvid on samad.

Lahendus 2. Pöörame kõigepealt pöödlava sellisesse asendisse, et tema mingi sektor A oleks tervenisti kohakuti liikumatu lavaosa mingi sektoriga A'. Selline olukord on võimalik, sest pöördlava sektori kesknurk on väiksem ülejäänud lava sektori kesknurgast Hakkame nüüd pöördlava pöörama päripäeva. Kui saabub hetk, mil sektor A sektor ei ole enam tervenisti vastava välimise sektoriga A' kohakuti, siis on kohakuti sektorit A pöördlaval talle päripäeva järgnevast sektorist B eraldav joon ja liikumatu lavaosa sektorit B järgnevast sektorist B' eraldav joon. Sel juhul aga on sektor B tervenisti kohakuti sektoriga B'. Seega võime nüüd sektorite A ja A' rollis vaadelda neid sektoreid. Jätkame pööramist seni, kuni pöördlava on läbinud täisringi.

Lahendused

1. *Vastus:* $(0,-1,-1)$, $(-1,0,-1)$, $(-1,-1,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ning $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Kui üks arvudest a, b, c on 0, siis kahe võrrandi vasaku poole väärtus on -1, mistõttu kaks ülejäänud arvu on mõlemad -1. Siit saame lahendid $(0,-1,-1)$, $(-1,0,-1)$ ja $(-1,-1,0)$. Kui üks arvudest a, b, c on -1, siis vaatleme võrrandit, mille parem pool on see arv. Näeme, et ülejäänud kahe arvu korrutis on 0, seega üks neist arvudest on 0. See juht on aga juba vaadeldud.

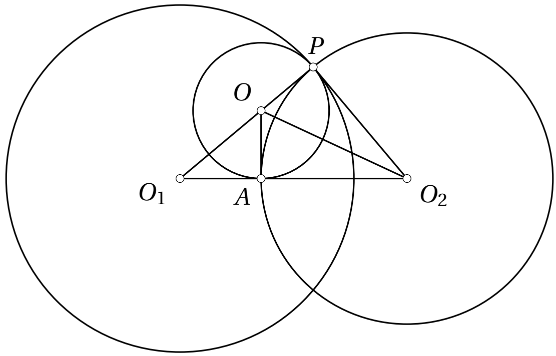
Eeldame nüüd, et ükski arvudest ei ole -1. Lahutades esimesest võrrandist teise, saame $b(a-c) = c-a$ ehk $(b+1)(a-c) = 0$. Et eelduse kohaselt $b \neq -1$, siis peab olema $a = c$. Lahutades teisest võrrandist kolmanda, saame analoogiliselt $a = b$. Seega on kõik arvud võrdsed ja süsteemi võrrandid taanduvad üheks võrrandiks $a^2 - 1 = a$, mille lahendid on $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. *Vastus:* 23.

Näitame esmalt, et vähemalt 23 käiku on vaja teha. Tõepoolest, iga lipp peab tegema vähemalt ühe käigu (kokku 16 käiku). Lisaks peab neljast nurgalipust vähemalt üks tegema 1 lisakäigu, sest igaüks neist saab ühe käiguga liikuda ainult mõne teise nurgalipu kohale, ent selleks tuleb esmalt vähemalt üks neist kohtadest vabastada. Ülejäänud 6 lippude paarist igaühes peab samuti vähemalt üks lippudest tegema 1 lisakäigu, sest ühe käiguga saab kumbki neist liikuda ainult oma paarilise kohale, ent selleks tuleb esmalt vähemalt üks neist kohtadest vabastada. Niisiis läheb kokku vaja vähemalt $16+1+6 = 23$ käiku.

Näitame nüüd, et 23 käiguga saab lippude kohad vahetada. Tähistame nüüd malelaua ruudud nii, et valged lipud on algselt ruutudel a1 kuni h1 ja mustad lipud ruutudel a8 kuni h8.

a) Vahetame 5 käiguga nurgalippude kohad: a1–a2, h8–a1, h1–h8, a8–h1, a2–a8.



Joonis 3

b) Vahetame 6 käiguga liinidel b ja c asuvate lippude kohad: b1–f5, c1–f4, b8–b1, c8–c1, f4–b8, f5–c8.

c) Vahetame 6 käiguga liinidel d ja e asuvate lippude kohad: d1–h5, e1–a5, d8–d1, e8–e1, h5–e8, a5–d8.

d) Vahetame 6 käiguga liinidel f ja g asuvate lippude kohad: f1–c4, g1–c5, f8–f1, g8–g1, c4–g8, c5–f8.

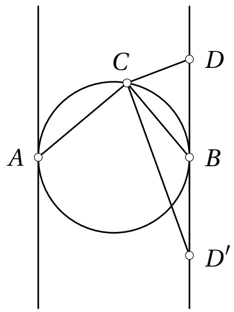
3. Eeldame, et leidub ringjoon, mis puutub ringjoont c_1 punktis P ja lõiku O_1O_2 punktis A (joonis 3). Olgu O selle ringjoone keskpunkt. Siis ringjoonte keskpunkte ühendav sirge O_1O läbib punkti P. Vaatleme kolmnurki OPO_2 ja OAO_2. Ilmselt $|OP| = |OA|$ ja $|O_2P| = |O_2A|$ kui vastavate ringjoonte raadiused, külg OO_2 on aga ühine. Järelikult on need kolmnurgad võrdsed. Et $\angle OAO_1 = 90^\circ$, siis ka $\angle OPO_2 = 90^\circ$.

Eeldame nüüd, et $\angle O_1PO_2 = 90^\circ$. Siis sirge O_2P puutub ringjoont c_1 punktis P, sest ta on risti ringjoone c_1 raadiusega O_1P. Et $|O_2P| = |O_2A|$, siis sirgele O_2P punktist P tõmmatud ristsirge ja sirgele O_2A punktist A tõmmatud ristsirge lõikuvad punktis O, mille korral $|OP| = |OA|$. Ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega $|OP|$ puutub siis nii ringjoont c_1 punktis P kui ka lõiku O_1O_2 punktis A.

4. *Vastus:* a) jah; b) ei.

Lahendus 1. a) Sobivateks punktideks on näiteks ruudu tipud ja selle diagonaalide lõikepunkt.

b) Olgu tasandil valitud mingi hulk punkte nii, et kõik kolmnurgad tippudega valitud punktides on täisnurksed ja ükski valitud punktide kolmik ei asu ühel sirgel. Fikseerime mingid kaks valitud punkti A ja B, ülejäänud valitud punktid peavad siis asuma kas ringjoonel diameetriga AB või lõigule AB selle otspunktidest tõmmatud ristsirgetel (joonis 4). Ringjoonel diameetriga AB saab paikneda kokku ülimalt neli valitud punkti (koos punktidega A ja B), sest mis tahes kolme sellise punkti korral peavad kaks neist



Joonis 4

olema selle ringjoone mingi ühe diameetri otspunktid. Kummalgi mainitud sirgel saab aga paikneda lisaks punktile A või B veel ainult üks punkt.

Eeldame, et leiduvad ülesande tingimustele vastavad punktid C ja D nii, et C paikneb ringjoonel diameetriga AB ja D lõigule AB selle otspunktist – olgu selleks näiteks B – tõmmatud ristsirgel. Kui punktid C ja D paiknevad sirgest AB samal pool, siis $\angle ACD > \angle ACB = 90^\circ$, st kolmnurk ACD ei ole täisnurkne. Kui punktid C ja D paiknevad sirgest AB erineval pool, siis $\angle DBC > \angle DBA = 90^\circ$, st kolmnurk DBC ei saa olla täisnurkne. Järelikult saavad ülejäänud punktid peale A ja B paikneda kas ainult ringjoonel diameetriga AB või ainult lõigu AB otspunktidest tõmmatud ristsirgetel. Kummalgi juhul saab punkte kokku olla ülimalt 4.

Lahendus 2. a) Sobivad punktid konstrueerime samamoodi nagu lahenduses 1.

b) Oletame väitevastaselt, et 5 punkti saab nõutud viisil valida. Et iga punktikolmik annab täisnurkse kolmnurga, siis leidub 10 täisnurkset kolmnurka, mille tipud asuvad antud punktides. Seega leidub antud 5 punkti hulgas selline, mille juures asub vähemalt kahe kolmnurga täisnurk. Olgu see punkt O ning A ja B ühe vastava kolmnurga ülejäänud tipud.

Vaatleme teist kolmnurka OXY, mille täisnurk asub tipus O. Kui X või Y asuks sirgel OA, siis peaks ta punktiga A kokku langema, muidu oleks kolm punkti ühel sirgel. Siis teine punktidest X ja Y asuks sirgel OB, st ikkagi oleks kolm punkti ühel sirgel. Analoogiliselt ei saa X ega Y asuda ka sirgel OB. Nüüd kui mõni antud punktidest asuks punktiga B võrreldes teisel pool sirget OA, siis määraks ta koos punktidega O ja B nürinurkse kolmnurga. Analoogiliselt ei saa ükski antud punkt asuda punktiga A võrreldes teisel pool sirget OB. Seega peavad punktid X ja Y asuma nurga AOB sees, kuid siis pole XOY täisnurk.

5. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Võtame arvude kirjutamiseks tahvli kõrval abiks ka paberi ning kirjutame sinna esialgu arvud 2 ja 3. Iga kord, kui valime tahvlil mingid arvud m ja n ning kirjutame tahvlile juurde arvu $mn + m + n$, valime paberil arvud $m + 1$ ja $n + 1$ ning kirjutame seejärel paberile arvu $(m+1)(n+1) = mn + m + n + 1$. Nii on kõik paberil olevad arvud ühe võrra suuremad vastavatest tahvlil olevatest arvudest. Paberile saavad tekkida ainult arvud kujul $2^a 3^b$ ning tahvlile seega ainult arvud kujul $2^a 3^b - 1$. Arv 2008 aga ei esitu sellisel kujul, sest arv 2009 ei jagu 2-ga ega 3-ga.

Lahendus 2. Arv 2008 annab 7-ga jagamisel jäägi 6. Selleks, et niisuguse omadusega arv tahvlile tekiks, peavad seal enne olema sellised m ja n, et arv $mn + m + n + 1$ ehk arv $(m+1)(n+1)$ jagub 7-ga. Et 7 on algarv, peab selleks kas $m+1$ või $n+1$ jaguma 7-ga. Selleks aga peab m või n andma 7-ga jagamisel jäägi 6. Et aga algselt tahvlil ühtegi niisuguse omadusega arvu ei ole, siis ei saa seda ka kunagi tekkida.

Lahendus 3. Kui mingil käigul valitakse arvud m ja n, millest vähemalt üks on paaritu, siis on ka uus arv $mn + m + n$ kindlasti paaritu. Seega niisugused käigud ei osale paarisarvude tekkes. Järelikult kui arv 2008 on võimalik saavutada, siis saab seda teha käikudega, kus alati valitakse paarisarvulised m ja n.

Näitame, et kõik selliste käikudega tekkivad arvud on kujul $3^k - 1$, kus k on positiivne täisarv. Tõepoolest, ainus algselt tahvlil olev paarisarv 2 esitub kujul $3^1 - 1$ ning kui käigul valitakse arvud $3^k - 1$ ja $3^l - 1$, tekib uus arv $(3^k - 1)(3^l - 1) + 3^k - 1 + 3^l - 1$ ehk $3^{k+l} - 1$. Et 2008 sellisel kujul ei avaldu, pole teda võimalik saavutada.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

29. märts 2008 Lõppvoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 5×7.

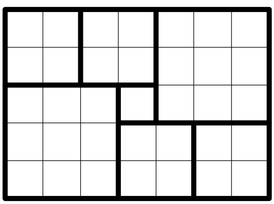
Vähim ruut ei saa asuda ristküliku küljel, sest siis asuks tema kõrval kummalgi pool suurem ruut ning nende vahele jääva ala saab katta ainult teise vähima ruuduga. Analoogiliselt ei saa vähim ruut asuda nurgas. Edasi, vähima ruudu ja ristküliku külje vahele peab jääma vähemalt ühe võrra rohkem ruute kui on vähima ruudu küljepikkus, sest muidu saaks sinna paigutada ainult teise vähima ruudu, kui üldse midagi. Seega on ristküliku kummagi külje pikkus vähemalt $1+2+2=5$. Kui ristküliku lühema külje pikkus on 5, siis peab selle külje ääres asuma ruut küljepikkusega vähemalt 3. See aga tähendab, et vähima ruudu ja selle külje vahele peab jääma vähemalt 3 ruutu. Analoogiline on olukord vastasküljega. Järelikult on ristküliku pikema külje pikkus sel juhul vähemalt $1+3+3=7$. Ristküliku mõõtmetega 5×7 saab katta nõutaval viisil, nagu näidatud joonisel 5, selle ristküliku pindala on 35. Kui ristküliku lühema külje pikkus oleks 6 või rohkem, siis oleks ristküliku pindala vähemalt $6 \cdot 6 = 36$ ja ta ei oleks vähima pindalaga.

2. *Vastus:* $(1,1)$ ja $(3,2)$.

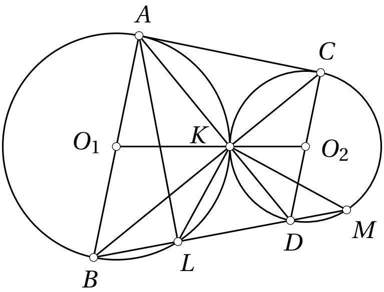
Eeldame, et b on paaritu. Et arvu 3 mis tahes paarituarvuline aste annab 4-ga jagamisel jäägi 3, siis peab 2^a andma 4-ga jagamisel jäägi 2, st $a=1$. Võrdusest $2-3^b+1=0$ ehk $3=3^b$ leiame $b=1$.

Eeldame nüüd, et b on paaris. Kirjutame seose kujul $3^b-1=2^a$, tegurdame vasaku poole ja saame

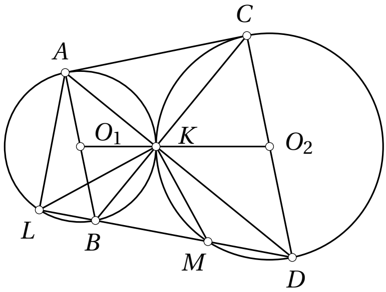
$$(3^{\frac{b}{2}}-1)(3^{\frac{b}{2}}+1)=2^a.$$



Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7

Et vasaku poole tegurite vahe on 2 ja nad mõlemad peavad olema 2 astmed, siis ainsa võimalusena $3^{\frac{b}{2}} - 1 = 2$ ja $3^{\frac{b}{2}} + 1 = 4$. Siit $b = 2$ ja $a = 3$.

3. Olgu O_1 ja O_2 vastavalt ringjoonte c_1 ja c_2 keskpunktid (joonised 6 ja 7). Võrdhaarsed kolmnurgad BO_1K ja CO_2K on sarnased, sest nende haarad on vastavalt paralleelsed: $AB \parallel CD$ ja punkt K asub lõigul O_1O_2. Järelikult on ka nende kolmnurkade alused paralleelsed ehk punkt K asub sirgel BC. Nüüd ühelt poolt $\angle KAL = \angle KBM$, teiselt poolt $\angle ALK = \angle ABK = \angle KCD = \angle KMB$. Seega on kolmnurkadel AKL ja BKM kaks paari võrdseid nurki ning need kolmnurgad on sarnased.

4. *Vastus:* võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = 2b = 4c$.

Lahendus 1. Viime liikmed vasakule poole ja teisendame:

$$\begin{aligned}
&a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 3ab - 4bc - 2ca = \\
&\quad = \left(\frac{3}{4}a^2 - 3ab + 3b^2\right) + \left(b^2 - 4bc + 4c^2\right) + \left(4c^2 - 2ca + \frac{1}{4}a^2\right) = \\
&\qquad = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \sqrt{3}b\right)^2 + (b - 2c)^2 + \left(2c - \frac{1}{2}a\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui kehtivad võrdused $\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}b$, $b = 2c$, $2c = \frac{1}{2}a$ ehk $a = 2b = 4c$.

Lahendus 2. Viime liikmed vasakule poole ja teisendame:

$$\begin{aligned}
&a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 3ab - 4bc - 2ca = \\
&\quad = \left(a^2 + \frac{9}{4}b^2 + c^2 - 3ab + 3bc - 2ca\right) + \left(\frac{7}{4}b^2 - 7bc + 7c^2\right) =
\end{aligned}$$

$$= \left(a - \frac{3}{2}b - c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}b - \sqrt{7}c\right)^2 \geqslant 0.$$

Võrdus kehtib siin parajasti siis, kui kehtivad võrdused $a = \frac{3}{2}b + c$ ja $\sqrt{7}c = \frac{\sqrt{7}}{2}b$, mis on samaväärsed võrdustega $a = 2b = 4c$.

Lahendus 3. Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust:

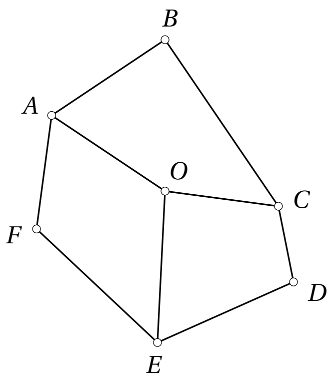
$$\frac{1{,}5a^2 + 6b^2}{2} + \frac{0{,}5a^2 + 8c^2}{2} + \frac{2b^2 + 8c^2}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{9a^2b^2} + \sqrt{4a^2c^2} + \sqrt{16b^2c^2} \geqslant$$
$$\geqslant 3|a||b| + 2|a||c| + 4|b||c| \geqslant 3ab + 4bc + 2ca.$$

Võrdus kehtib parajasti sel juhul, kui kehtivad võrdused $1{,}5a^2 = 6b^2$, $0{,}5a^2 = 8c^2$, $2b^2 = 8c^2$ ning a, b ja c on samamärgilised. Teiste sõnadega, $a = 2b = 4c$.

Lahendus 4. Vaatleme ruutvõrrandit $a^2 - (3b + 2c)a + (4b^2 + 8c^2 - 4bc) = 0$ muutuja a suhtes. Selle ruutvõrrandi diskriminant on

$$D = (3b + 2c)^2 - 4(4b^2 + 8c^2 - 4bc) =$$
$$= -7b^2 + 28bc - 28c^2 = -7(b - 2c)^2$$

Näeme, et diskriminant saab mis tahes b ja c korral omandada ainult mittepositiivseid väärtusi. Et vastava ruutvõrrandi pealiikme kordaja on positiivne, siis suvalise reaalarvude korral $a^2 - (3b+2c)a + (4b^2 + 8c^2 - 4bc) \geqslant 0$,



Joonis 8

mis on samaväärne ülesande võrratusega. Koostades analoogsed ruutvõrrandid b ja c suhtes, siis saame vastavalt diskriminandid $D = -7(2a-4b)^2$ ja $D = -7(a-4c)^2$. Seega võrdus kehtib parajasti siis, kui $b = 2c$, $2a = 4b$, $a = 4c$ ehk $a = 2b = 4c$.

5. *Vastus:* ei.

Eeldame, et selline kumer kuusnurk leidub, olgu O ümberringjoonte ühine lõikepunkt (joonis 8). Siis nelinurgad $ABCO$, $CDEO$ ja $EFAO$ on kõik kõõlnelinurgad, järelikult $\angle BAO + \angle BCO = 180^\circ$, $\angle DCO + \angle DEO = 180^\circ$ ja $\angle FEO + \angle FAO = 180^\circ$. Liites need kolm võrdust kokku, saame

$$\angle BCD + \angle DEF + \angle FAB = 3 \cdot 180^\circ.$$

Teiselt poolt, et kumeras kuusnurgas on kõik sisenurgad väiksemad kui 180°, peab viimase kolme nurga summa olema väiksem kui $3 \cdot 180^\circ$. Vastuolu, järelikult niisugust kuusnurka ei leidu.

Lahendused

1. *Vastus:* $\frac{25}{16}$.

Lahendus 1. Esitame arvud u ja v kujul $u = \frac{1}{2} + x$ ja $v = \frac{1}{2} - x$. Siis

$$(1+u^2)(1+v^2) = \left(1 + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right) = \left(1 + \frac{1}{4} + x^2 + x\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \frac{1}{4} + x^2 - x\right) = \left(\frac{5}{4} + x^2\right)^2 - x^2 = \frac{25}{16} + \frac{5}{2}x^2 + x^4 - x^2 = \frac{25}{16} + \frac{3}{2}x^2 + x^4.$$

Et $\frac{3}{2}x^2$ ja x^4 on mittenegatiivsed, siis realiseerub avaldise vähim väärtus juhul $x = 0$. Sel juhul $(1+u^2)(1+v^2) = \frac{25}{16}$.

Lahendus 2. Et $u + v = 1$, siis

$$(1+u^2)(1+v^2) = 1 + u^2 + v^2 + u^2v^2 =$$
$$= 1 + (u+v)^2 - 2uv + u^2v^2 = 2 - 2(uv) + (uv)^2.$$

Võtame $s = uv$. On teada, et kahe muutuva, kuid konstantse summaga suuruse korrutis on suurim, kui need suurused on võrdsed. Järelikult suuruse s suurim võimalik väärtus on $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ehk $\frac{1}{4}$, seega s kuulub piirkonda $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$. Uuritav väärtus on $2 - 2s + s^2 = (s-1)^2 + 1$. Viimane avaldis on kogu nimetatud piirkonnas kahanev ja omandab seega juhul $s = \frac{1}{4}$ vähima väärtuse $\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$.

Lahendus 3. Et $u + v = 1$, siis

$$(1+u^2)(1+v^2) = (1+u^2)(1+(1-u)^2) =$$
$$= (1+u^2)(2 - 2u + u^2) = 2 - 2u + 3u^2 - 2u^3 + u^4.$$

Funktsiooni $g(u) = 2 - 2u + 3u^2 - 2u^3 + u^4$ tuletis on

$$g'(u) = -2 + 6u - 6u^2 + 4u^3 = 2(2u^3 - 3u^2 + 3u - 1) = 2(2u-1)(u^2 - u + 1).$$

Et ruutkolmliikmel $u^2 - u + 1$ puuduvad reaalarvulised nullkohad, siis tuletise ainuke nullkoht on $u = \frac{1}{2}$. Funktsioon g saavutab sel kohal tõesti minimaalse väärtuse, sest g pealiikme kordaja on positiivne. Seega otsitav vähim väärtus on $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 = \frac{25}{16}$.

Lahendus 4. Võime eeldada, et u ja v kuuluvad lõigule $[0;1]$, sest kui $u > 1$ või $v > 1$ (ehk $v < 0$ või $u < 0$), siis $(1+u^2)(1+v^2) > 2$, aga näiteks juhul $u = 1$, $v = 0$ on vaadeldava avaldise väärtus 2. Uurime funktsiooni $l(x) = \ln(1 + x^2)$:

$$l'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad l''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Kui $x \in [0;1]$, siis $1 - x^2 \geqslant 0$, seega funktsioon $l(x)$ on kumer. Järelikult Jenseni võrratusest

$$\frac{l(u)+l(v)}{2} \geqslant l\left(\frac{u+v}{2}\right) = l\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \ln\frac{5}{4},$$

millest

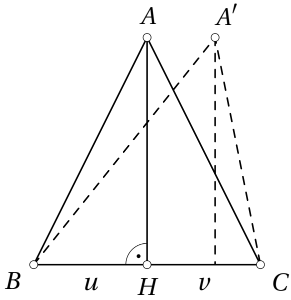
$$l(u) + l(v) \geqslant 2\ln\frac{5}{4} = \ln\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \ln\frac{25}{16},$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti juhul $u = v = \frac{1}{2}$. Nüüd saame

$$(1+u^2)(1+v^2) = e^{l(u)}e^{l(v)} = e^{l(u)+l(v)} \geqslant e^{\ln\frac{25}{16}} = \frac{25}{16},$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti juhul $u = v = \frac{1}{2}$.

Lahendus 5. Vaatleme kolmnurka ABC, mille külg BC ja kõrgus AH (joonis 9) on pikkusega 1 ning aluspunkt H jaotab külje BC osadeks pikkustega u ja v (analoogiliselt lahendusega 4 võime eeldada, et u ja v on mittenegatiivsed). Siis $u+v = 1$ ning $(1+u^2)(1+v^2) = |AB|^2|AC|^2 = \frac{1}{\sin^2 \angle BAC}$, sest pindala valemitest $\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AH| = \frac{1}{2}$. Ent selleks, et $\sin\angle BAC$ oleks suurim, peab kõrguse aluspunkt H poolitama lõigu BC: kui c on kolmnurga ABC ümberringjoon niisugusel juhul, siis punkti H iga muu asukoha korral jääks tipp A väljapoole ringjoont c, mistõttu nurga BAC suurus oleks väiksem (nurga BAC suurus on alati väiksem kui 90°, sest BC ei saa olla kolmnurga ABC pikim külg). Kui H on lõigu BC keskpunkt, siis $|AB|^2 = |BC|^2 = \frac{5}{4}$, millest $|AB|^2|BC|^2 = \frac{25}{16}$.



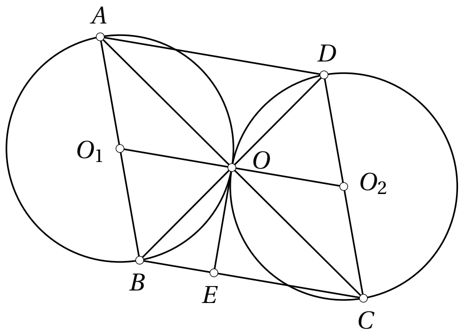
Joonis 9

2. Eeldame, et kolmnurkade AOB ja COD ümberringjooned puutuvad (joonis 10). Tõmbame ringjoontele punktist O ühise puutuja, olgu E selle lõikepunkt küljega BC. Siis $\angle EOB = \angle OAB = \angle BCO$, sest $|AB| = |BC|$. Analoogiliselt $\angle EOC = \angle ODC = \angle CBO$. Kolmnurgast BOC saame nüüd $\angle EOB + \angle EOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$ ehk $2\angle EOB + 2\angle EOC = 180^\circ$, millest $\angle BOC = \angle EOB + \angle EOC = 90^\circ$.

Eeldame nüüd, et lõigud AC ja BD on risti. Et kolmnurgad AOB ja COD on täisnurksed, asuvad nende kolmnurkade ümberringjoonte keskpunktid O_1 ja O_2 vastavatel hüpotenuusidel AB ja CD. Siis $\angle O_1OA = \angle O_1AO = \angle BCO$ ja $\angle O_2OD = \angle O_2DO = \angle CBO$. Et kolmnurk BOC on täisnurkne, siis $\angle BCO + \angle CBO = 90^\circ$. Seetõttu $\angle O_1OA + \angle AOD + \angle O_2OD = \angle BCO + 90^\circ + \angle COB = 180^\circ$. Järelikult kolmnurkade AOB ja COD ümberringjooned puutuvad punktis O.

3. *Vastus:* a) 1 b) 1.

a) Algarvust n väiksemad ja temaga ühistegurita naturaalarvud on parajasti



Joonis 10

kõik arvud 1 kuni $n-1$. Vahesumma $1+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ jagub paaritu algarvuga n parajasti siis, kui $k(k+1)$ jagub n-ga ehk k jagub n-ga või $k+1$ jagub n-ga. Et aga $1 \leqslant k \leqslant n-1$, siis n-ga jaguva vahesumma annab ainult $k=n-1$.

b) Olgu $n=p^2$, kus p on paaritu algarv. Arvuga n ühistegurita on parajasti need arvud, mis p-ga ei jagu:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & \ldots & p-1 \\
p+1 & p+2 & \ldots & 2p-1 \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
(p-1)p+1 & (p-1)p+2 & \ldots & p^2-1.
\end{array}$$

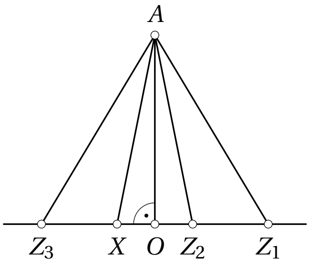
Kui mingi vahesumma jagub p^2-ga, jagub ta ka p-ga. Et eelneva tabeli read erinevad üksteisest ainult p kordsete võrra, siis vastavalt a)-osa lahendusele jaguvad p-ga need ja ainult need vahesummad, mis tekivad pärast iga rea viimase arvu lisamist.

Esimese rea arvude summa on $\dfrac{p(p-1)}{2}$, iga järgmise rea arvude summa on eelnevast $p(p-1)$ võrra suurem. Järelikult ridade summad on $1\cdot\dfrac{p(p-1)}{2}$, $3\cdot\dfrac{p(p-1)}{2}$, $5\cdot\dfrac{p(p-1)}{2}$ jne ning esimese i rea arvude summa on $(1+3+5+\ldots+(2i-1))\cdot\dfrac{p(p-1)}{2}=i^2\cdot\dfrac{p(p-1)}{2}$. Viimane avaldis jagub p^2-ga parajasti siis, kui $i^2\cdot p(p-1)$ jagub p^2-ga ehk $i^2(p-1)$ jagub p-ga. See on võimalik ainult siis, kui i jagub p-ga ehk $i=p$. Niisiis jagub vaadeldavatest vahesummadest p^2-ga ainult see, mis sisaldab kõiki liidetavaid.

Märkus. Võib tõestada, et kõiki võimalikke liidetavaid sisaldav summa jagub n-ga iga $n>2$ korral. Kui n ei ole algarv ega algarvu ruut, siis võib leiduda teisigi n-ga jaguvaid vahesummasid. Näiteks juhul $n=16$ lisandub üks vahesumma $1+3+5+7$, juhul $n=39$ kaks vahesummat jne.

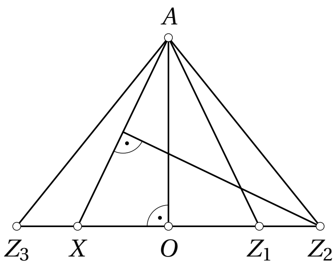
4. *Lahendus 1.* Olgu O punktist A sirgele l tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Vaatleme järgmisi juhte.

- Kui punktid X ja Z_1 erinevad punktist O ning $|AX| \neq |AZ_1|$, siis olgu Z_2 ja Z_3 vastavalt punktide X ja Z_1 peegeldused punktist O (joonis 11). Kõik need punktid on erinevad. Lõigu OX pikkus on ratsionaalarv, sest $|OX|=|AX|\cos\angle AXZ_1$ ja koosinusteoreemi põhjal on ratsionaalarvuliste küljepikkustega kolmnurga AXZ_1 nurkade koosinused ratsionaalarvud. Nüüd on kolmnurga AXZ_2 küljepikkused ratsionaalarvud, sest $|XZ_2|=2|OX|$ ja $|AZ_2|=|AX|$. Ka kolmnurga AXZ_3 küljepikkused on ratsionaalarvud, sest $|XZ_3|=|Z_2Z_1|=|XZ_1|-|XZ_2|$ ja $|AZ_3|=|AZ_1|$.

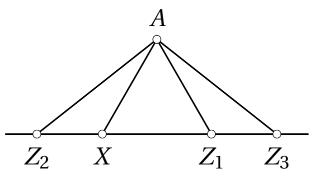


Joonis 11

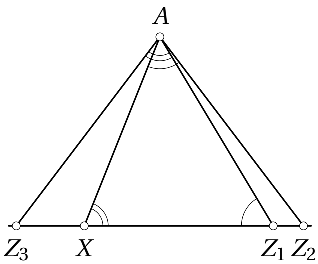
- Kui punktid X ja Z_1 erinevad punktist O, kuid $|AX| = |AZ_1|$ ning $\angle XAZ_1 \neq 60^\circ$, siis valime sirgel l punktid Z_2 ja Z_3 nii, et $|AZ_2| = |Z_2X|$ ja $|AZ_3| = |Z_3Z_1|$ (joonis 12). Kolmnurgad Z_2XA ja Z_3Z_1A on siis mõlemad võrdhaarsed ja sarnased kolmnurgaga AXZ_1 sarnasusteguritega vastavalt $\frac{|AX|}{|XZ_1|}$ ja $\frac{|AZ_1|}{|XZ_1|}$. Seega on nende kolmnurkade küljepikkused samuti ratsionaalarvud. Punktid Z_2 ja Z_3 erinevad punktidest X ja Z_1, sest vaadeldavate võrdhaarsete kolmnurkade tipunurk on alusnurgast erineva suurusega, samuti erinevad nad omavahel, sest vastasel korral oleks $\angle XAZ_1 = 90^\circ$, aga võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet ja hüpotenuus ei saa olla korraga ratsionaalarvud.
- Kui punktid X ja Z_1 erinevad punktist O, kuid $|AX| = |AZ_1|$ ning $\angle XAZ_1 = 60^\circ$, siis valime punkti Z_2 nii, et ta asub lõigu Z_1X pikendusel üle punkti X ja $|XZ_2| = 0{,}6\,|AX|$, punkt Z_3 olgu punkti Z_2 peegeldus punktist O (joonis 13). Koosinusteoreemist $|AZ_2| = |AX|^2 + |XZ_2|^2 - 2\cdot|AX|\cdot|XZ_2|\cdot\cos 120^\circ = (1+0{,}36-2\cdot 1\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}5))|AX|^2 = 1{,}96\,|AX|^2$, järelikult $|AZ_2| = 1{,}4\,|AX|$. Seega on kolmnurga AXZ_2 ja analoogiliselt kolmnurga AXZ_3 küljepikkused ratsionaalarvud.
- Kui üks punktidest X ja Z_1, näiteks X, langeb kokku punktiga O, siis olgu Z_2 punkti Z_1 peegeldus punkti O suhtes. Kolmnurk Z_1AZ_2 on



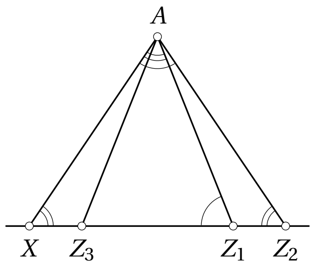
Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14



Joonis 15

siis võrdhaarne ja ratsionaalarvuliste küljepikkustega ning punkti Z_3 saame konstrueerida samamoodi nagu eelmisel juhul.

Lahendus 2. Kui kolmnurk AXZ_1 on võrdkülgne, st $|AX| = |AZ_1|$ ning $\angle XAZ_1 = 60^\circ$, siis toimime samamoodi nagu lahenduses 1. Vaatleme nüüd juhtu, kus kolmnurk AXZ_1 ei ole võrdkülgne.

- Eeldame, et $|XZ_1| \neq |AX|$ ja $|XZ_1| \neq |AZ_1|$. Valime kiirel XZ_1 punkti Z_2 nii, et $\angle Z_2AX = \angle AZ_1X$, ning kiirel Z_1X punkti Z_3 nii, et $\angle Z_3AZ_1 = \angle AXZ_1$ (joonis 14). Punktid Z_2 ja Z_1 on erinevad, sest $\angle AZ_1X \neq \angle Z_1AX$, samuti on punktid Z_3 ja X erinevad, sest $\angle AXZ_1 \neq$ $\neq \angle XAZ_1$. Kolmnurgad Z_2XA ja Z_3AZ_1 on sarnased kolmnurgaga AXZ_1 vastavalt sarnasusteguritega $\dfrac{|AX|}{|Z_1X|}$ ja $\dfrac{|Z_1A|}{|Z_1X|}$, järelikult on nende kolmnurkade küljepikkused ratsionaalarvud ning ka lõigu XZ_3 pikkus on ratsionaalarv.
- Eeldame, et $|XZ_1| = |AX|$ või $|XZ_1| = |AZ_1|$, üldisust kitsendamata kehtigu neist võrdustest teine (joonis 15). Punkti Z_2 valime samal viisil nagu eelmisel juhul. Siis punkt Z_2 erineb punktidest X ja Z_1 ning kolmnurga AXZ_2 küljepikkused on ratsionaalarvud. Punkt Z_3 olgu punkti Z_1 peegeldus lõigu XZ_2 keskristsirge suhtes. Punkt Z_3 erineb punktist Z_1, sest muidu oleks AXZ_1 võrdhaarne täisnurkne kolmnurk. Kolmnurk AXZ_3 on võrdne kolmnurgaga AZ_2Z_1, mille küljepikkused on ratsionaalarvud.

5. *Lahendus 1.* Kui pulkade seas leidub vertikaalne pulk, mille kukkumist ükski teine pulk ei takista, siis väide kehtib. Eeldame järgnevas, et ükski vertikaalne pulk vabalt kukkuda ei saa. Joonistame seina alla horisontaalse sirge. Vaatleme pulkade otspunkte, mille all ei asu teiste pulkade punkte. Kui see otspunkt on oma pulgal vasak otspunkt, siis värvime tema all asuva sirge punkti siniseks, parempoolse otspunkti korral aga kollaseks. Vasakpoolseim sirge punkt, mille kohal üldse pulkade punkte asub, on ilmselt värvitud siniseks, analoogiline parempoolseim punkt aga kollaseks. Liikudes mööda sirget vasakult paremale, leidub seega koht, kus sinisest punktist järgmine värvitud punkt on kollane. Need kaks punkti märgivad ühe ja sama pulga otspunkte, sest nende punktide vahele jääva lõigu iga sisepunkti kohal olev madalaim pulgapunkt peab kuuluma samale pulgale nii lõigu vasaku otspunkti kohal asuva punktiga kui ka parema otspunkti kohal asuva punktiga. Ühtlasi nähtub sellest, et see pulk saab vabalt kukkuda.

Lahendus 2. Tõestame väite induktsiooniga pulkade arvu järgi. Kui pulki on ainult üks, siis väide ilmselt kehtib. Olgu pulki rohkem. Vaatleme kolme juhtu.

a) Leidub pulk p, mille iga punkti all asub mõne teise pulga punkt. Eemaldame selle pulga. Induktsiooni eelduse kohaselt leidub nüüd pulk v, mis saab kukkuda. Paneme pulga p tagasi. See pulk ei saa olla ainsana pulga v liikumise takistaja, sest p iga punkti all asub mõne teise pulga punkt ja koos p-ga peaks v liikumist takistama veel mõni pulk.

b) Leidub pulk p, mis kukkuda ei saa ja mille langemist takistavad pulgad asuvad kõik terves ulatuses tema all. Eemaldame selle pulga ja kõik ülejäänud pulgad, mis ei asu p all. Et saadud seisus on vähem pulki kui esialgu, leidub pulk v, mis saab kukkuda. See pulk saab kukkuda ka esialgses seisus, sest teda saaksid takistada ainult need pulgad, mis asuvad ühtlasi p all.

c) Kui eelmised kaks juhtu ei kehti, siis igal pulgal leidub punkte, mille all on vaba ruum, ja iga pulk kas saab kukkuda või vähemalt üks teda takistav pulk ei asu tema ees tervenisti. Olgu p pulk, millele kuulub kõige parempoolsem punkt pulkade hulgas (kui neid pulki on mitu, siis valime selle, millele kuulub kõige ülemine selline punkt). Eemaldame pulga p. Induktsiooni eelduse kohaselt leidub nüüd pulk v, mis saab kukkuda. Paneme pulga p tagasi. Kui v saab ka nüüd kukkuda, siis väide kehtib. Vastasel korral takistab tema kukkumist ainult pulk p. Et pulgal v leidub punkte, mille all on vaba ruum, siis ulatub v vasak otspunkt kaugemale p vasakust otspunktist. Pulga p nende punktide all, mis asuvad ühtlasi v all, ei leidu kukkumist takistavaid pulki, sest muidu ei oleks saanud v kukkuda. Pulga p ülejäänud punktide all ei leidu samuti kukkumist takistavaid pulki, sest p ulatub pulkade seas kõige rohkem paremale, mistõttu iga tema langemist takistav pulk peaks asuma tervenisti tema all. Järelikult saab p kukkuda.

Lahendus 3. Vaatleme suunatud graafi, mille tippudeks on pulgad ning milles leidub kaar tipust a tippu b parajasti siis, kui pulga a liikumist takistab pulk b. Piisab tõestada, et see graaf ei sisalda suunatud tsükleid. Siis leidub graafis tipp väljundastmega 0, st pulk, mille kukkumist ükski teine pulk ei takista.

Oletame väitevastaselt, et graafis leidub suunatud tsükleid, olgu p_1, $p_2, \ldots,$ p_n vähima pikkusega tsükkel. Selles ei saa leiduda kaart ühegi kahe tipu vahel, mis ei ole tsüklis järjestikused, sest vastasel korral saaksime tsükli pikkust vähendada. Olgu p_1 üldisust kitsendamata see pulk tsüklis, mille vasak otspunkt asub kõige kaugemal vasakul (kui selliseid on mitu, siis vaatleme neist kõige alumist). Siis p_2 parempoolne otspunkt asub p_1 paremast otspunktist kaugemal paremal, sest vastasel korral takistaks pulk p_3 nii p_2 kui ka p_1 kukkumist, st tsükli sees leiduks kaar p_1 ja p_3 vahel. Samal põhjusel asub p_3 vasak otspunkt p_1 paremast otspunktist paremal. Nüüd saame analoogiliselt eelnevaga, et p_3 parem otspunkt asub kaugemal paremal kui p_2 parem otspunkt jne kuni p_n parem otspunkt asub kaugemal paremal kui p_{n-1} parem otspunkt. Järelikult p_n parem otspunkt asub kaugemal paremal kui p_1 parem otspunkt. Tehes aga veel ühe sammu mööda tsüklit, saame, et p_1 parem otspunkt asub kaugemal paremal kui p_n parem otspunkt, vastuolu.

Märkus. Ülesande väide ei kehti üldiselt, kui pulgad ei ole sirged. Näiteks kaks poolkaarekujulist pulka võivad vastastikku teineteise langemist takistada.