Eesti LV matemaatikaolümpiaad

29. märts 2008 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Linnu A ja B ühendaval raudteel sõidab rong täiskiirusega, välja arvatud kahel lõigul, mille halva seisukorra tõttu peab rong kiirust vähendama. Kui ükskõik kumb neist lõikudest remonditaks, suureneks rongi keskmine kiirus A ja B vahel kolmandiku võrra. Kui palju suureneks rongi keskmine kiirus A ja B vahel, kui remonditaks mõlemad lõigud?

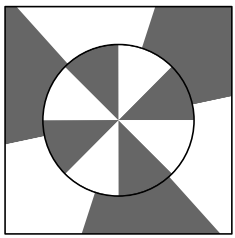
2. Leia kõik võimalused, milline saab olla $\overline{abc} \cdot (a+b+c)$, kui $\overline{bca} = (a+b+c)^3$ ja $b \neq 0$. (Kirjutis $\overline{xyz}$ tähistab arvu numbritega x, y, z.)

3. a) Ringjooned c_1 ja c_2 puutuvad väliselt punktis A, samuti puutuvad väliselt ringjooned c_2 ja c_3 punktis B ning ringjooned c_3 ja c_1 punktis C. Kas alati, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, on ringjooned c_1, c_2, c_3 võrdse raadiusega?

b) Ringjooned c_1 ja c_2 puutuvad väliselt punktis A, samuti puutuvad väliselt ringjooned c_2 ja c_3 punktis B, ringjooned c_3 ja c_4 punktis C ning ringjooned c_4 ja c_1 punktis D. Kas alati, kui nelinurk $ABCD$ on ruut, on ringjooned c_1, c_2, c_3, c_4 võrdse raadiusega?

4. Kuubi iga tahk on jaotatud $n \times n$ ühesuuruseks ruuduks. Kas saab tõmmata igale sellisele ruudule ühe diagonaali nii, et kõigist tõmmatud diagonaalidest moodustub üks kinnine joon, mis ei läbi ühtegi punkti korduvalt?

5. Teatri pöördlava on keskpunktist X lähtuvate kiirtega jaotatud $2n+2$ võrdseks sektoriks, kus n on positiivne täisarv (joonisel $n = 3$). Sektorid on värvitud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Pöördlavast väljapoole jääv liikumatu põrandaosa on punktist X lähtuvate kiirtega jaotatud $2n$ nurgamõõdult võrdseks sektoriks, mis on samuti värvitud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Tõesta, et sõltumata pöördlava pöördeasendist leidub sellel alati vähemalt üks sektor, mis on terves ulatuses kohakuti liikumatu põrandaosa samavärvilise sektoriga.



Eesti LV matemaatikaolümpiaad

29. märts 2008 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik reaalarvude kolmikud (a, b, c), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ab - 1 = c \\ bc - 1 = a \\ ca - 1 = b. \end{cases}$$

2. Malelaual suurusega 8×8 asub esimese rea igal ruudul valge lipp ja viimase rea igal ruudul must lipp. Igal käigul saab liigutada ühte (emba-kumba värvi) lippu suvalise arvu ruutude võrra ühes suunas (vertikaalis, horisontaalis või diagonaalis) tühjale ruudule nii, et ta ei astu oma käigul üle ühestki teisest lipust. Milline on vähim arv käike, millega saab vahetada valgete ja mustade lippude asukohad (sama värvi lippude omavaheline järjestus võib seejuures muutuda)?

3. Ringjooned c_1 ja c_2 keskpunktidega vastavalt O_1 ja O_2 lõikuvad punktis P. Lõik O_1O_2 ja ringjoon c_2 lõikuvad punktis A. Tõesta, et ringjoon, mis puutub ringjoont c_1 punktis P ja lõiku O_1O_2 punktis A, leidub parajasti siis, kui $\angle O_1PO_2 = 90^\circ$.

4. Kas tasandil saab valida 5 erinevat punkti nii, et kõik kolmnurgad tippudega valitud punktides on täisnurksed ning

a) ükski valitud punktide nelik ei asu ühel sirgel;

b) ükski valitud punktide kolmik ei asu ühel sirgel?

5. Tühjale tahvlile kirjutatakse algul arvud 1 ja 2. Edasi valitakse igal käigul mingid juba tahvlil olevad arvud m ja n (võib olla ka $m = n$) ning kirjutatakse tahvlile juurde arv $mn + m + n$. Kas lõpliku arvu selliste käikude abil on võimalik tahvlile kirjutada arv 2008?

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

29. märts 2008 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Milliste mõõtmetega on pindalalt vähim ristkülikukujuline plaat, mida on võimalik tükeldada kaheks või enamaks ruudukujuliseks osaks, mille küljepikkused on täisarvud ja millest väikseim esineb ainult ühes eksemplaris?

2. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$2^a - 3^b + 1 = 0.$$

3. Erineva raadiusega ringjooned c_1 ja c_2 puutuvad väliselt punktis K. Ringjoonte ühine väline puutuja puutub ringjooni vastavalt punktides A ja C. Ringjoontele on tõmmatud diameetrid AB ja CD. Sirge BD lõikab ringjoont c_1 teist korda punktis L ning ringjoont c_2 punktis M. Tõesta, et kolmnurgad AKL ja BKM on sarnased.

4. Tõesta, et suvaliste reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geqslant 3ab + 4bc + 2ca.$$

Millal kehtib võrdus?

5. Kas leidub selline kumer kuusnurk $ABCDEF$, et kolmnurkade ABC, CDE ja EFA ümberringjooned lõikuvad kuusnurga sees ühes punktis?

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

29. märts 2008 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $(1+u^2)(1+v^2)$ vähim võimalik väärtus, kui u ja v on sellised reaalarvud, et $u+v=1$.

2. Kumeras nelinurgas $ABCD$ on $|AB| = |BC| = |CD|$. Nelinurga diagonaalid AC ja BD lõikuvad punktis O. Tõesta, et kolmnurkade AOB ja COD ümberringjooned puutuvad parajasti siis, kui AC ja BD on risti.

3. Kõik naturaalarvust n väiksemad temaga ühistegurita positiivsed täisarvud liidetakse kasvavas järjekorras. Mitu korda tekib pärast järjekordse arvu liitmist vahesumma, mis jagub n-ga, kui

a) n on paaritu algarv;

b) n on paaritu algarvu ruut?

4. Antud on punkt A, seda mitteläbiv sirge l ja sirgel asuv punkt X. Tõesta, et kui sirgel l leidub selline punkt Z_1, et kolmnurga AXZ_1 kõigi külgede pikkused on ratsionaalarvud, siis leidub sirgel l veel kaks punkti Z_2 ja Z_3, mille korral kolmnurkade AXZ_2 ja AXZ_3 kõigi külgede pikkused on ratsionaalarvud.

5. Vertikaalsele seinale on kinnitatud lõplik arv peenikesi sirgeid pulki, mis üksteist ei puutu. Pulga lahtilaskmisel kukub see seina mööda otse alla, jäädes kogu aeg paralleelseks oma esialgse asendiga. Tõesta, et leidub pulk, mis lahtilaskmisel (ülejäänud pulgad jäävad paigale) kukub põrandani, ilma et ükski teine pulk tema liikumist takistaks.