Lõppvoor 2007

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **9. klass**

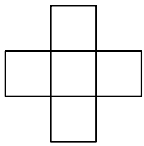
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia suurim selline naturaalarv, mille iga number peale esimese on eelmisest ühe võrra väiksem ning mis jagub iga oma numbriga.

2. Kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud mediaanid on omavahel risti. Tõesta, et kolmnurga külg AB on lühem kolmnurga kummastki ülejäänud küljest.

3. Kooli direktor soovib palgata lisaks olemasolevatele õpetajatele teatud arvu uusi õpetajaid. Kui ta palkaks lisaks 10 õpetajat, väheneks kooli õpilaste arv ühe õpetaja kohta 5 võrra. Kui aga direktor palkaks 20 uut õpetajat, väheneks õpilaste arv ühe õpetaja kohta 8 võrra. Kui palju õpilasi ja kui palju õpetajaid on selles koolis?

4. Joonisel on näidatud 5 ühikruudust koosnev kujund, *kreeka rist*. Milline on suurim arv kreeka riste, mida saab täielikult ja ilma omavaheliste kattumisteta paigutada ruudustikule mõõtmetega 8×8, kusjuures risti iga ühikruut katab ruudustikus parajasti ühe ruudu?



5. Juhan tahab vihtideta kangkaalu abil raskuse järjekorda seada viis erineva kaaluga kuuli. Enne kaalumise alustamist nummerdab ta kuulid arvudega 1 kuni 5 ja koostab kaalumiste nimekirja, mis koosneb kuulide järjekorranumbrite paaridest (st nimekiri on selliste paaride loetelu). Seejärel võrdleb ta ükshaaval iga nimekirjas oleva numbripaari jaoks vastava kahe kuuli raskust. Kas Juhan saab koostada kaalumiste nimekirja, kus on vähem kui 10 paari, nii et selle abil saaks kuulide raskuse järjekorra igal juhul täielikult määrata?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Seitsmekohalise naturaalarvu numbrid on paarikaupa erinevad ja see arv jagub iga oma numbriga.

a) Leia kõik võimalused, millised saavad olla need kolm numbrit, mis selles arvus ei sisaldu.

b) Too näide sellisest arvust.

2. Ringjoonele c keskpunktiga O on tõmmatud ristuvad raadiused OA ja OB. Nende raadiustega piiratud sektori sisse joonestatakse ringjoon, mis puutub raadiusi vastavalt punktides C ja D ning ringjoont c punktis Q. Leia nurga AQC suurus.

3. Tõesta, et kolme erineva positiivse paaritu täisarvu ruutude summa saab esitada kuue (mitte tingimata erineva) positiivse täisarvu ruutude summana.

4. Kaks kolmnurka paigutatakse tasandile nii, et nendega kokku kaetud ala moodustab hulknurga (mitte tingimata kumera). Leia kõik võimalused, milline saab olla selle hulknurga tippude arv.

5. Raamatu identifikaator koosneb n-liikmelisest jadast, kus liikmetena võivad esineda ainult numbrid $0, 1, \ldots, 9$, ning lõpus asuvast naturaalarvust – *kontrollkoodist*. Viimane leitakse jada põhjal kindla reegli järgi, kusjuures alati, kui jadas muuta ühte suvalist numbrit suuremaks (jättes ülejäänud samaks), muutub ka vastav kood suuremaks. Milline on vähim võimalik erinevate kontrollkoodide arv, kui kõik n-liikmelised numbrijadad on identifikaatorites kasutusel?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvud a, mille korral ruutvõrrandi $x^2 - ax + a = 0$ lahendid on täisarvud.

2. On antud ruumiline malelaud mõõtmetega $4 \times 4 \times 4$. Ruumiline vanker saab ühe sammuga liikuda ühikkuubist K suvalisse teise ühikkuupi, millel on kuubiga K ühine tahk. Ruumiline oda saab ühe sammuga liikuda ühikkuubist K suvalisse teise ühikkuupi, millel on kuubiga K ühine serv, kuid pole ühist tahku. Nii vankri kui oda üks *käik* koosneb mingist positiivsest arvust järjestikustest sammudest ühes suunas. Leia kummagi malendi keskmine võimalike käikude arv, kui malendi lähtekohaks võib olla suvaline malelaua ühikkuup.

3. Võrdhaarse kolmnurga ABC haara AB otspunkte läbiv ringjoon lõikab kolmnurga alust BC punktis P. Sellele ringjoonele punktist B tõmmatud puutuja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis Q. Tõesta, et punkt P asub sirgel AQ parajasti siis, kui sirge AQ on risti kolmnurga alusega BC.

4. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral

$$m^n - n^m = 3.$$

5. Tasandile on paigutatud teatud arv ringe raadiusega 2. Tõesta, et nende ringidega kaetud ala kogupindala on arvuliselt vähemalt niisama suur kui seda ala piiravate kaarte kogupikkus.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Antud on ühise põhjaga püstsilinder ja püstkoonus. Silindri see osa, mis jääb koonuse sisse, on ruumalalt võrdne silindri osaga väljaspool koonust. Leia koonuse kõrguse suhe silindri kõrgusesse.

2. Positiivsed reaalarvud x, y ja z on sellised, et arvud x^n, y^n ja z^n on iga naturaalarvu n korral mingi kolmnurga küljepikkused. Tõesta, et vähemalt kaks arvudest x, y ja z on võrdsed.

3. Kas leidub selline võrdkülgne kolmnurk

a) tasandil;

b) ruumis,

mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega?

4. Olgu a, b ja c niisugused positiivsed täisarvud, et $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$ ning iga kahe arvu korrutis jagub kolmanda arvuga.

a) Tõesta, et igaüks neist arvudest on võrdne kahe ülejäänud arvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatisega.

b) Too näide sellistest ühest suurematest arvudest a, b ja c.

5. Ruudustikus mõõtmetega $n \times n$ märgitakse osa ruute ristidega nii, et igas 4×4 ruudus märgitakse vähemalt pooled ruudud. Leia vähim võimalik märgitud ruutude koguarv ruudustikus.

LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **9 класс**

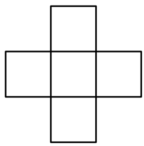
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наибольшее натуральное число, которое делится на каждую свою цифру, а каждая его цифра кроме первой на единицу меньше предыдущей.

2. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин A и B, перпендикулярны друг другу. Доказать, что сторона треугольника AB короче каждой другой его стороны.

3. Директор школы хочет в дополнение к уже имеющимся учителям нанять на работу ещё некоторое количество учителей. Если бы он дополнительно нанял 10 учителей, то количество учеников школы на одного учителя уменьшилось бы на 5. А если бы директор нанял на работу 20 новых учителей, количество учеников на одного учителя уменьшилось бы на 8. Сколько учеников и сколько учителей в этой школе?

4. На рисунке изображён *греческий крест* — фигура, состоящая из 5 единичных квадратов. Чему равно наибольшее число греческих крестов, которое можно полностью и без пересечений между собой выложить на клетчатое поле размерами 8×8, причём каждый единичный квадрат греческого креста покрывал бы ровно одну клетку поля?



5. Юра хочет при помощи рычажных весов без грузов упорядочить по весу пять шаров разного веса. Перед началом взвешивания он нумерует шары числами от 1 до 5 и составляет список взвешиваний, который состоит из пар порядковых номеров шаров (т.е. список — это перечисление таких пар). После этого он по очереди сравнивает для каждой присутствующей в списке пары номеров вес соответствующих двух шаров. Может ли Юра составить список взвешиваний, в котором менее 10 пар, такой, что при его помощи можно в каждом случае полностью определить порядок шаров по весу?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Цифры семизначного натурального числа попарно различны, а само число делится на каждую свою цифру.

а) Найти все возможности, чему могут равняться три цифры, которые это число не содержит.

б) Привести пример такого числа.

2. К окружности c с центром O проведены перпендикулярные радиусы OA и OB. Внутрь сектора, ограниченного этими радиусами, вписывают окружность, которая касается радиусов соответственно в точках C и D, а окружности c в точке Q. Найти величину угла AQC.

3. Доказать, что сумму квадратов трёх различных положительных нечётных целых чисел можно представить в виде суммы квадратов шести (не обязательно различных) положительных целых чисел.

4. Два треугольника располагают на плоскости так, что покрытая ими вместе область является многоугольником (не обязательно выпуклым). Найти все возможные значения количества вершин этого многоугольника.

5. Идентификатор книги состоит из последовательности, в которую входит n членов, каждым из которых может быть одна из цифр $0, 1, \ldots, 9$, а также находящегося в конце натурального числа — *контрольного кода*. Последний вычисляется исходя из последовательности при помощи определённого правила, причём всегда, когда в последовательности увеличивают какую-то одну произвольную цифру (оставив остальные цифры прежними), увеличивается также и соответствующий контрольный код. Чему равно наименьшее возможное число различных контрольных кодов, если все n-членные последовательности цифр задействованы в идентификаторах?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие действительные числа a, при которых корни квадратного уравнения $x^2 - ax + a = 0$ — целые числа.

2. Дана пространственная шахматная доска размерами $4 \times 4 \times 4$. Пространственная ладья может одним шагом передвинуться из единичного куба K в любой другой единичный куб, имеющий с кубом K общую грань. Пространственный слон может одним шагом передвинуться из единичного куба K в любой другой единичный куб, имеющий с кубом K общее ребро, но не имеющий общей грани. *Ход* как ладьи, так и слона состоит из некоторого положительного числа последовательных шагов в одном направлении. Найти среднее число возможных ходов каждой фигуры, если начальным местом фигуры может быть любой единичный куб шахматной доски.

3. Окружность, проходящая через вершины боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, пересекает основание треугольника BC в точке P. Касательная к этой окружности, проведённая из точки B, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Доказать, что точка P расположена на прямой AQ тогда и только тогда, когда прямая AQ перпендикулярна основанию треугольника BC.

4. Найти все пары (m, n) положительных целых чисел, при которых

$$m^n - n^m = 3.$$

5. На плоскости расположено некоторое число кругов радиуса 2. Доказать, что общая площадь области, покрываемой этими кругами, численно не меньше суммарной длины дуг, ограничивающих эту область.

LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Дан прямой цилиндр и прямой конус с общим основанием. Объём той части цилиндра, которая находится внутри конуса, равен объёму части цилиндра, остающейся вне конуса. Найти отношение высоты конуса к высоте цилиндра.

2. Положительные действительные числа x, y и z таковы, что числа x^n, y^n и z^n при каждом натуральном n являются длинами сторон какого-то треугольника. Доказать, что по крайней мере два из чисел x, y и z равны.

3. Найдётся ли

a) на плоскости;

б) в пространстве

равносторонний треугольник, все вершины которого имеют целочисленные координаты?

4. Пусть a, b и c — такие положительные целые числа, что НОД$(a, b, c) = 1$, а произведение любых двух чисел делится на третье.

a) Доказать, что каждое из этих чисел является отношением наименьшего общего кратного и набольшего общего делителя двух остальных чисел.

б) Привести пример таких чисел a, b и c, каждое из которых больше единицы.

5. В клетчатом поле размерами $n \times n$ часть клеток отмечают крестиками так, что в каждом квадрате 4×4 отмечена по крайней мере половина клеток. Найти наименьшее возможное количество отмеченных клеток в клетчатом поле.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

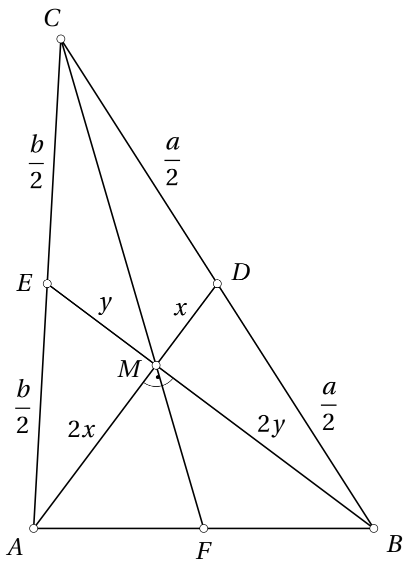
31. märts 2007 Lõppvoor **9. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 432.

Ilmselt ei saa see arv sisaldada numbrit 0. Iga vähemalt kahekohaline nõutud omadusega arv sisaldab paarisnumbrit ning peab seega olema paarisarv, st tema viimane number peab olema paaris. Seega ei saa selline arv sisaldada ka numbrit 5, sest siis peaks ta jaguma 5-ga ehk lõppema 0-ga või 5-ga. Seega saab otsitav arv olla ülimalt neljakohaline. Ainus kõne alla tulev neljakohaline arv on 9876, mis aga ei jagu 8-ga (tegelikult ka mitte 7-ga ega 9-ga). Kolmekohalistest arvudest tulevad kõne alla 876, mis ei jagu 8-ga (ega ka 7-ga), ning 432, mis sobib.

2. *Lahendus 1.* Olgu M mediaanide lõikepunkt ning F tipust C tõmmatud mediaani aluspunkt (joonis 1). Punkt F on siis täisnurkse kolmnurga ABM hüpotenuusi keskpunkt ehk kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Seetõttu $|AB| = 2|FM|$ Et mediaanide lõikepunkt M jaotab mediaani CF suhtes $2:1$, siis $2|FM| = |CM|$. Järelikult $|AB| = |CM|$. Kolmnurgas AMC



Joonis 1

suurim nurk on $\angle AMC$, sest see on nürinurk, ning selle nurga vastas asub kolmnurga pikim külg. Seega $|AC| > |MC|$ ehk AC on pikem kui AB. Analoogiliselt tõestame, et BC on pikem kui AB.

Lahendus 2. Olgu D ja E vastavalt kolmnurga tippudest A ja B tõmmatud mediaanide aluspunktid. Tähistame $|MD| = x$ ja $|ME| = y$. Siis $|AM| = 2x$ ning $|BM| = 2y$. Pythagorase teoreemist kolmnurgas ABM saame

$$|AB|^2 = 4x^2 + 4y^2.$$

Kolmnurgast AME saame samamoodi $|AE|^2 = 4x^2 + y^2$. Et $|AE| = \dfrac{|AC|}{2}$, siis

$$|AC|^2 = 4 \cdot (4x^2 + y^2) = 16x^2 + 4y^2.$$

Analoogiliselt

$$|BC|^2 = 4 \cdot (x^2 + 4y^2) = 4x^2 + 16y^2.$$

Siit näeme, et $|AC|^2 > |AB|^2$ ja $|BC|^2 > |AB|^2$, mis tähendab, et kolmnurga küljed AC ja BC on pikemad kui külg AB.

3. *Vastus:* 600 õpilast ja 30 õpetajat.

Olgu x õpilaste arv ja y õpetajate arv koolis. Siis ühe õpetaja kohta tuleb $\dfrac{x}{y}$ õpilast. Kui lisanduks 10 uut õpetajat, siis oleks õpilaste arv ühe õpetaja kohta $\dfrac{x}{y+10}$. Seega saame võrrandi

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y+10} + 5,$$

millest pärast teguriga $y(y+10)$ korrutamist $xy + 10x = xy + 5y(y+10)$ ehk $x = \frac{1}{2}y(y+10)$.

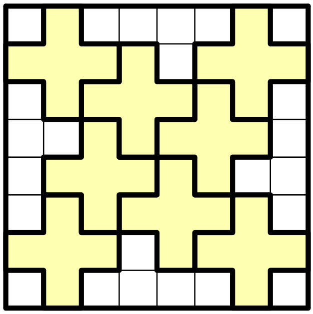
Kui aga lisanduks 20 uut õpetajat, siis oleks õpilaste arv ühe õpetaja kohta $\dfrac{x}{y+20}$ ning me saame võrrandi

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y+20} + 8.$$

Siit $xy + 20x = xy + 8y(y+20)$ ehk $x = \frac{2}{5}y(y+20)$.

Järelikult peab kehtima võrdus

$$\frac{1}{2}y(y+10) = \frac{2}{5}y(y+20),$$



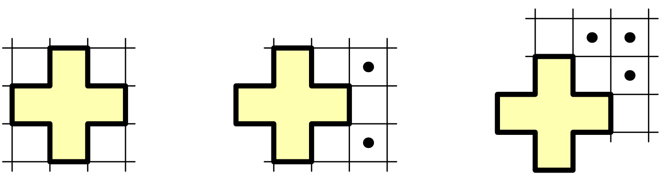
Joonis 2

millest pärast 10-ga korrutamist saame $5y(y+10) = 4y(y+20)$ ning pärast liikmete ühele poole toomist $y(5y+50-4y-80) = 0$ ehk $y(y-30) = 0$. Siit $y = 30$, sest y peab olema positiivne. Järelikult $x = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (30+10) = 600$. Koolis on seega 600 õpilast ja 30 õpetajat.

4. *Vastus:* 8.

Lahendus 1. Ruudustiku igal serval paiknevast 8 ruudust saab ristidega kaetud olla ülimalt 2 (sest 3 risti kõrvuti ei mahu). Seega saab servades kaetud olla ülimalt $4 \cdot 2 = 8$ ruutu. Ruute, mis ei asu servadel, on kokku $6 \cdot 6 = 36$. Järelikult saab ruudustikus kokku kaetud olla $8 + 36 = 44$ ruutu. Et rist koosneb 5 ruudust, siis saab riste olla ülimalt 8. Täpselt 8 risti on võimalik ruudustikule paigutada, nagu näitab joonis 2.

Lahendus 2. Tõestame, et ruudustiku suvalises 3×3 ruudus saavad paikneda ülimalt 2 risti keskmised ruudud (joonis 3). Kui ühe risti keskmine ruut katab 3×3 ala keskmise ruudu, siis ei saa enam ühegi risti keskmine ruut selle 3×3 ala kohal olla. Kui ühe risti keskmine ruut katab 3×3 ala ühe ääreruudu, mis pole nurgas, siis saab teise risti paigutada küll kahel viisil, kuid mõlemat korraga paigutades tekiks omavaheline kattumine. Kui ühe risti keskmine ruut katab 3×3 ala nurgaruudu, siis saab teise risti paigutada kolmel viisil, kuid ükskõik millised kaks neist samal põhjusel välistavad teineteist.



Joonis 3

Antud 8×8 ruudustikule paigutatud risti keskmine ruut ei saa asuda selle ala äärel, vaid peab asuma sisemises 6×6 alas. Jaotame selle neljaks 3×3 alaks. Igaühes neist saab eelpool öeldut arvesse võttes asuda ülimalt 2 risti keskmine ruut. Seega kokku saab olla ülimalt 4×2 ehk 8 risti. Selles, et täpselt 8 risti saab paigutada, veendume nagu lahenduses 1.

5. *Vastus:* ei.

Viie kuuli puhul on võimalik võrrelda 10 erinevat kuulide paari:

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5).$$

Kui nimekirjast on mõni paar puudu, näiteks $(1,2)$, siis ei ole võimalik eristada kaalujärjestust 1, 2, 3, 4, 5 kaalujärjestusest 2, 1, 3, 4, 5, sest kõik ülejäänud kaalumised annavad nende korral sama tulemuse. Järelikult peavad sobivas nimekirjas kõik 10 paari esindatud olema.

Lahendused

1. *Vastus:* a) 0, 4 ja 5; b) sobib näiteks 7639128.

a) Ilmselt ei saa see arv sisaldada numbrit 0. Iga nõutud omadusega arv sisaldab paarisnumbreid ning peab seega olema paarisarv, st tema viimane number peab olema paaris. Seega ei saa selline arv sisaldada ka numbrit 5, sest siis peaks ta jaguma 5-ga ehk lõppema 0-ga või 5-ga. Et ülejäänud 8 numbri summa on 40, siis saab see arv jaguda 9-ga (ja seega sisaldada numbrit 9) vaid juhul, kui kolmandana jääb välja number 4. Kui see arv aga 9-ga ei jaguks, siis jääks kolmandana välja number 9 ning arvu numbrite summa oleks 31, mistõttu see arv ei jaguks ka 3-ga – vastuolu.

b) Otsitav arv jagub kindlasti 3-ga ja 9-ga, sest tema numbrite summa on 36. Paigutame arvu lõppu numbrid 128, siis jagub arv kindlasti 2-ga, 4-ga, 6-ga ja 8-ga. Et arv jaguks 7-ga, paneme numbri 7 esimesele kohale, siis võib ta vaatluse alt ära jätta, kahele järgmisele kohale paneme 63, mille võib ka seejärel vaatluse alt välja jätta. Järele jääb number 9 ja arv 9128, mis ilmselt jagub 7-ga.

Märkus. Üldse leidub 105 ülesande tingimustele vastavat arvu.

2. *Vastus:* 45°.

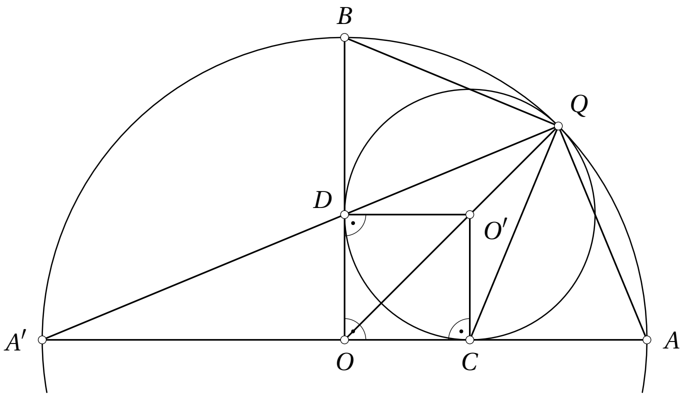
Lahendus 1. Sümmeetria tõttu ilmselt $\angle AQC = \angle BQD$ (joonis 4). Et nurk AQB on korrapärase kaheksanurga sisenurk, siis

$$\angle AQB = \frac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ.$$

Olgu O' punkte C, D ja Q läbiva ringjoone keskpunkt. Nelinurgas $OCO'D$ on kolm nurka täisnurgad: nurk COD eelduse põhjal, nurgad OCO' ja ODO' aga moodustuvad raadiuse ja puutuja vahel. Seega on ka $CO'D$ täisnurk, mistõttu $\angle CQD = \frac{1}{2}\angle CO'D = 45^\circ$ ja

$$\angle AQC = \frac{1}{2}(\angle AQB - \angle CQD) = \frac{1}{2}(135^\circ - 45^\circ) = 45^\circ.$$

Lahendus 2. Olgu O' punkte C, D ja Q läbiva ringjoone keskpunkt ning A' ringjoone c punktist A tõmmatud diameetri teine otspunkt. Võrdhaarsed kolmnurgad $QO'D$ ja QOA' on sarnased, sest nende tipunurgad on



Joonis 4

võrdsed sirgete $O'D$ ja AA' paralleelsuse tõttu. See tähendab, et sirge QD läbib punkti A'. Järelikult toetub nurk AQA' diameetrile ning on seega täisnurk. Sümmeetria tõttu $\angle DQO = \angle OQC = \angle QCO'$. Seega $\angle OQA = 90^\circ - \angle DQO = 90^\circ - \angle QCO' = \angle ACQ$. Nüüd näeme, et kolmnurgad QAO ja ACQ on sarnased, sest neil on kaks vastavalt võrdset nurka. Seega $\angle AQC = \angle QOA = 45^\circ$.

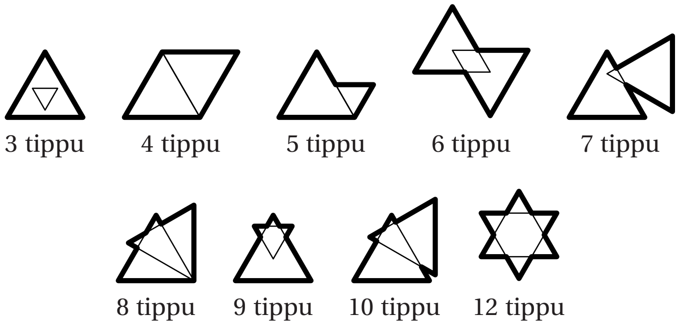
Lahendus 3. Olgu O' punkte C, D ja Q läbiva ringjoone keskpunkt. Ringjoone c raadius on ühelt poolt $|OC|+|CA|$, teiselt poolt aga $|OO'|+|O'Q|$. Et $OCO'D$ on ristkülik, sest tal on kolm täisnurka, siis $|OC| = |O'D| = |O'Q|$. Järelikult $|CA| = |OO'| = |DC|$. Sümmeetria tõttu ka $|QC| = |QD|$. Teoreem lõikajast ja puutujast annab $\angle ACQ = \angle CDQ$. Seega on kolmnurgad AQC ja CQD sarnased. Järelikult $\angle AQC = \angle CQD$. Kasutades veelkord teoreemi lõikajast ja puutujast, saame edasi $\angle CQD = \angle OCD = 45^\circ$, sest OCD on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

3. Olgu a, b ja c vaadeldavad arvud, üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a > b > c$. Kehtivad seosed

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} =$$
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

Et a, b ja c on paaritud, siis on kõik sulgudes olevad arvud positiivsed täisarvud.

Märkus. Ülesande tekstis oli viga – puudus sõna „positiivsete“. Kui arvude seas võib olla ka negatiivseid, siis väide ei kehti, näiteks $(-1)^2 + 1^2 + 3^2 = 11$ pole esitatav 6 positiivse täisarvu ruutude summana.



Joonis 5

4. *Vastus:* kõik täisarvud 3-st 12-ni, välja arvatud 11.

Igal saadaval hulknurgal on ilmselt vähemalt 3 tippu. Näitame, et hulknurgal ei saa olla rohkem kui 12 tippu. Tõepoolest, saadava hulknurga tippudeks saavad olla ainult nende kahe kolmnurga tipud ning ühe kolmnurga külgede lõikepunktid teise kolmnurga külgedega. Esimest liiki tippe saab hulknurgal olla ülimalt 6, teist liiki tippe samuti ülimalt 6, sest esimese kolmnurga iga külg saab lõigata ülimalt kahte teise kolmnurga külge.

Näitame, et 11 tipuga hulknurk ei ole võimalik. Tõepoolest, siis peaksid neist 11 tipust olema kas 6 kolmnurkade tipud ja 5 külgede lõikepunktid või vastupidi. Esiteks, kui hulknurgal on 6 tippu on kolmnurkade tipud, siis ei tohi kummagi kolmnurga ükski tipp paikneda teise kolmnurga sees. Seega lõikab kummagi kolmnurga iga külg kas 0 või 2 teise kolmnurga külge ning külgede lõikepunkte ei saa olla paaritu arv. Teiseks, kui hulknurgal on 6 tippu, mis on moodustunud esialgsete kolmnurkade külgede lõikepunktidena, siis lõikab kummagi kolmnurga iga külg teise kolmnurga kaht külge, mistõttu kummagi kolmnurga ükski tipp ei saa paikneda teise kolmnurga sees (siis sellest tipust lähtuvad servad lõikaksid kumbki ülimalt ühte teise kolmnurga külge). Järelikult on ka kolmnurkade kõik 6 tippu vaadeldava hulknurga tippudeks.

Kõik ülejäänud tippude arvud 3-st 12-ni on võimalikud, nagu näitab joonis 5.

5. *Vastus:* $9n + 1$.

Jadale $(0, 0, \ldots, 0)$ vastab mingi üks kontrollkood. Muutes esimest numbrit jadas sammukaupa suuremaks, saame jadad $(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(9, 0, \ldots, 0)$, millest tekib veel 9 erinevat kontrollkoodi. Muutes nüüd viimati saadud jadas analoogiliselt teist numbrit sammukaupa suuremaks, saame jadad $(9, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(9, 9, \ldots, 0)$, millest tekib veel 9 kontrollkoodi. Iga numbri muutmisel saame 9 uut koodi, koos esialgsega peab koode kokku olema seega vähemalt $9n + 1$.

Tõestame, et koode saab olla täpselt $9n + 1$. Loeme jada koodiks jada liikmete summa. See rahuldab ülesande tingimusi, sest alati, kui jada mõnda ühte numbrit suurendatakse, suureneb ka numbrite summa. Kuid numbrite summa saab muutuda ainult piirides 0 kuni $9n$, kuhu kuulub $9n + 1$ arvu. Seega on erinevaid koode antud juhul ülimalt $9n + 1$. Et neid ei saa lahenduse esimese osa põhjal ka vähem olla, peab erinevaid koode olema täpselt $9n + 1$.

Lahendused

1. *Vastus:* 0 ja 4.

Lahendus 1. Olgu x ja y vaadeldava ruutvõrrandi lahendid. Viète'i valemitest $x + y = xy = a$. Juhul $y = 1$ saame vastuolulise võrduse $1 + x = x$, muidu aga

$$x = \frac{y}{y-1}.$$

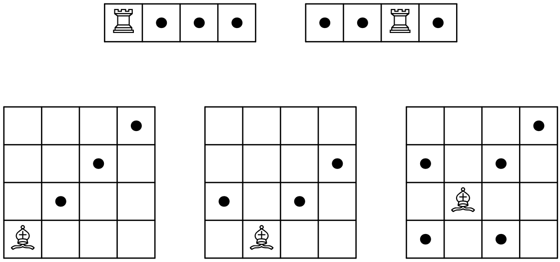
Siin on tegemist kahe järjestikuse täisarvu jagatisega, mis saab olla täisarv ainult juhtudel $y = 2$ ja $y = 0$. Tõepoolest, kui $y > 2$, siis $2 > \frac{y}{y-1} > 1$; kui aga $y < 0$, siis $1 > \frac{y}{y-1} > 0$. Nüüd, kui $y = 2$, siis $x = 2$, mistõttu $a = x + y = 4$; kui aga $y = 0$, siis $x = 0$ ja $a = x + y = 0$.

Lahendus 2. Ruutvõrrandi lahendivalemist $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$ näeme, et nullkohtade summa on a ja nullkohtade vahe on $\sqrt{a^2 - 4a}$. Kui nullkohad on täisarvud, siis on nii nende vahe kui ka summa täisarvud. Järelikult on a täisarv ja $a^2 - 4a$ on täisruut. Siin $a^2 - 4a = (a-2)^2 - 4$. See arv ei saa olla täisruut, kui $(a-2)^2 \geqslant 9$, sest siis erineks $(a-2)^2$ eelmisest täisruudust rohkem kui 4 võrra. Et ilmselt ei saa see arv olla täisruut ka juhul $(a-2)^2 < 4$, siis ainsa võimalusena jääb järele $(a-2)^2 = 4$, millest $a = 0$ või $a = 4$. Kontroll näitab, et kummalgi juhul on $x^2 - ax + a = 0$ lahendid täisarvulised.

2. *Vastus:* vankri puhul 9, oda puhul 10,5.

Vankri puhul on ühes sihis liikumiseks alati 3 erinevat võimalust (joonis 6) ning kõigi kolme sihi peale seega 9 võimalust. Et käiguvõimaluste arv ei sõltu siin lähtekuubist, siis on ka keskmine käiguvõimaluste arv 9.

Kui oda asub malelaua „tsentris“ ehk ühikkuubis, mis ei piirne malelaua tahuga, siis on tal mingi tahuga paralleelsel tasandil 5 käiguvõimalust. Et selliseid tasandeid on 3, siis on odal tsentris asudes $3 \times 5 = 15$ käiguvõimalust. Tsentrikuupe on ilmselt 8. Kui oda asub ühikkuubis, mis piirneb malelaua tahuga, aga mitte servaga, siis on tal vastava tahuga paralleelsel tasandil 5 käiguvõimalust, ülejäänud kahel tasandil aga 3 käiguvõimalust, kokku $5+3+3 = 11$. Et kuubil on 6 tahku ja iga tahuga piirneb 4 vaadeldavat liiki ühikkuupi, siis on selliseid ühikkuupe kokku $6 \cdot 4 = 24$. Ülejäänud



Joonis 6

juhtudel asub oda kõigi kolme tasandi suhtes malelaua äärel, sel juhul on tal igal tasandil 3 käiguvõimalust, kokku $3 \cdot 3 = 9$. Võimalikke lähtekuupe on $64 - 8 - 24 = 32$. Keskmine käiguvõimaluste arv on kokkuvõttes

$$\frac{8 \cdot 15 + 24 \cdot 11 + 32 \cdot 9}{64} = 10{,}5.$$

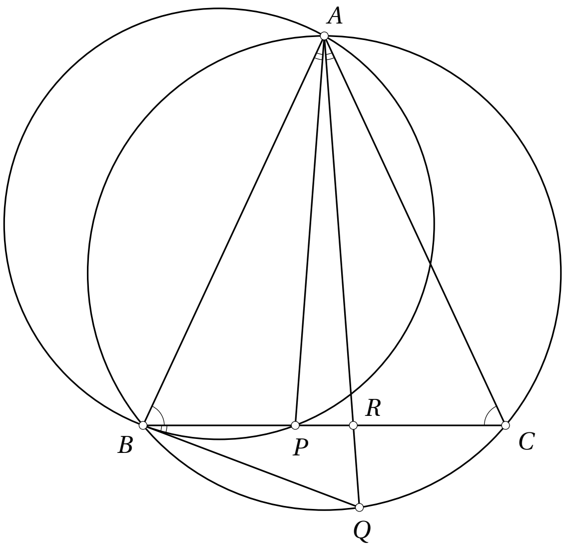
Märkus. Malendi käiguvõimaluste arv iseloomustab teataval määral malendi tugevust. Lahendusest nähtub, et „ruumilises“ males võiks oda olla vankrist tugevam („tasandilises“ males on vastupidi). Samas kahandab oda tugevust asjaolu, et talle on ikka kättesaadavad ainult pooled malelaua väljad, erinevalt vankrist.

Et $4 \times 4 \times 4$ ruumilisel malelaual on väljade arv sama nagu 8×8 tasandilisel malelaual, siis saab ruumiliste malendite tugevust võrrelda ka tavaliste malendite tugevusega. Viimaste puhul on näiteks vankril alati 14 käiguvõimalust ja odal keskmiselt 8,75.

3. *Lahendus 1.* Olgu R sirge AQ lõikepunkt alusega BC (joonis 7). Ühelt poolt kolmnurga võrdhaarsuse tõttu $\angle ACR = \angle ABP$, teiselt poolt aga, kasutades teoreemi puutujast ja lõikajast, $\angle CAR = \angle CBQ = \angle PAB$. Järelikult on kolmnurgad ACR ja ABP sarnased. Kui $AQ \perp BC$, siis AR on kõrgus ning $\angle ARC = \angle APB = 90^\circ$. Siit $P = R$, mis tähendabki, et P asub sirgel AQ. Kui aga P asub sirgel AQ, siis $P = R$, mis annab $\angle CRA = \angle CPA = 180^\circ - \angle BPA = 180^\circ - \angle CRA$ ehk $\angle CRA = 90^\circ$ ehk $AQ \perp BC$.

Lahendus 2. Vaatleme algul juhtu, kus AB on punktidega A, B ja P määratud ringjoone diameeter. Siis $\angle APB = 90^\circ$ ja $\angle QBA = 90^\circ$. Viimasest võrdusest saame, et AQ on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Võrdhaarse kolmnurga tipust tõmmatud diameeter on aga risti alusega. Seega $AQ \perp BC$ ja P asub sirgel AQ.

Teiselt poolt, kui haara AB otspunkte läbiva ringjoone keskpunkt nihkub haarast AB kaugemale pooltasandil, millele jääb punkt C, siis punkt Q



Joonis 7

nihkub punkti B poole, punkt P aga punkti C poole. Seega P ei saa asuda sirgel AQ ega AQ olla küljega BC risti. Samuti, kui ringjoone keskpunkt nihkub haarast AB kaugemale teisel pooltasandil, siis punkt Q nihkub punkti C poole, punkt P aga punkti B poole. Seega ka sel juhul ei saa P asuda sirgel AQ ega AQ olla BC-ga risti.

4. *Vastus:* $(4, 1)$.

Kui m ja n oleksid sama paarsusega, siis oleks võrduse vasak pool paaris. Järelikult peavad m ja n olema erineva paarsusega.

- Kui m on paaritu ja n paaris, siis m^n annab 4-ga jagades jäägi 1. Järelikult peab n^m andma 4-ga jagades jäägi 2. See on võimalik ainult siis, kui $m = 1$. Siis aga $m^n = 1$ ning võrduse vasaku poole väärtus oleks väiksem kui 3. Seega sel juhul lahendeid ei leidu.
- Kui m on paaris ja n paaritu, siis n^m annab 8-ga jagades jäägi 1. Siis aga m^n annab 8-ga jagades jäägi 4. See tähendab, $n \leqslant 2$ ning et n on paaritu, siis $n = 1$, millest $m = 4$.

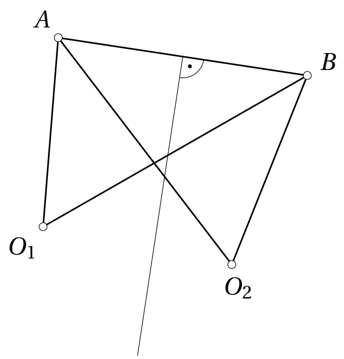
5. *Lahendus 1.* Kujundi rajajoon koosneb ringjoonte kaartest. Konstrueerime iga sellise kaare jaoks ringi sektori, mis toetub sellele kaarele. Vastavalt sektori pindala valemile $S = \frac{rl}{2}$, kus r on ringi raadius ja l kaare pikkus, saame, et juhul $r = 2$ võrdub sektori pindala arvuliselt sama sektori kaare pikkusega.

Tõestame, et ühelgi kahel sektoril ei ole ühiseid sisepunkte. Kui kaks sektorit kuuluvad samale ringile, siis on nende ainus ühine punkt ringi keskpunkt. Eeldame nüüd, et üks sektor kuulub ringile w_1 keskpunktiga O_1 ja teine ringile w_2 keskpunktiga O_2. Kui sektoritel leidub ühine sisepunkt C, siis tõmbame läbi selle ringidele w_1 ja w_2 vastavalt raadiused O_1A ja O_2B. Ilmselt asuvad A ja B ringidega kaetud ala rajajoonel. Siis B ei asu ringi w_1 sisepiirkonnas ja A ei asu ringi w_2 sisepiirkonnas. Järelikult $|O_1B| \geqslant |O_1A|$ ja $|O_2A| \geqslant |O_2B|$. Tõmbame lõigu AB keskristsirge (joonis 8). Viimased võrratused näitavad, et punkt O_1 asub keskristsirgest samal pool nagu punkt A ning punkt O_2 samal pool nagu punkt B. Järelikult ei saa lõikudel O_1A ja O_2B olla ühiseid punkte, vastuolu.

Seega saame, et kogu kujundi rajajoone pikkus võrdub sektorite kaarte pikkuste summaga, kujundi pindala on aga vähemalt niisama suur kui sektorite kogupindala.

Lahendus 2. Tõestame väite matemaatilise induktsiooniga ringide arvu järgi. Ühe ringi korral on nii pindala kui ka ümbermõõt võrdsed arvuga 4π. Ühe ringi lisandumisel tuleb nii kaetud ala pindalale kui piiravate joonte pikkusele liita 4π, kuid lisaks tuleb vastavalt lahutada uue ringi ja senise kujundi ühisosa pindala ja seda piiravate joonte pikkus. Seega piisab tõestada, et tekkiva ühisosa iga sidusa komponendi pindala on ülimalt niisama suur kui ümbermõõt.

Kui ühisosa sidusa komponendi ümbermõõt on suurem kui 4π, siis väide kehtib, sest komponendi pindala ei saa olla suurem kui 4π. Kui aga ümbermõõt on väiksem kui 4π, siis avaldame ta kujul $2\pi r$, kus $r \leqslant 2$. Kasutades fakti, et sama ümbermõõdu juures on suurim pindala ringil, näeme, et ühisosa pindala ei saa ületada suurust πr^2. Tingimuse $r \leqslant 2$ tõttu $\pi r^2 \leqslant 2\pi r$, st pindala ei ületa ümbermõõtu.



Joonis 8

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **12. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Olgu V ja V_k vastavalt silindri ja koonuse ruumala, h ja H vastavalt silindri ja koonuse kõrgus ning S nende ühine põhjapindala. Koonuse tipp ulatub silindrist väljapoole, sest vastasel korral moodustaks nende kehade ühisosa ülimalt $\frac{1}{3}$ silindri ruumalast ja silindri ülejäänud osa vähemalt $\frac{2}{3}$, nagu nähtub koonuse ja silindri ruumala valemite võrdlemisel.

Tähistame lühiduse mõttes $\dfrac{h}{H} = x$. Silindrist väljapoole jääv koonuse osa on antud koonusega sarnane koonus sarnasusteguriga $\dfrac{H-h}{H} = 1-x$, tema ruumala on järelikult $(1-x)^3 V_k$. Silindri sisse jääva koonuse osa ruumala on siis $V_k - (1-x)^3 V_k = (1-(1-x)^3) V_k = (x^3 - 3x^2 + 3x) V_k$. Ülesande tingimuste järgi võrdub see poolega silindri ruumalast. Et $V = Sh$ ja $V_k = \frac{1}{3} SH$, siis $\frac{1}{2} V = \frac{3}{2}\frac{h}{H} V_k = \frac{3}{2} x V_k$. Seega saame võrrandi

$$(x^3 - 3x^2 + 3x)\, V_k = \frac{3}{2} x\, V_k$$

ehk $x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$, mille lahendid on $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$. Et $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} > 1$, kuid $h < H$ tõttu $x < 1$, siis sobib ainult lahend $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$. Koonuse kõrguse suhe silindri kõrgusesse on

$$\frac{H}{h} = \frac{1}{x} = \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Eeldame, et arvud x, y ja z on kõik erinevad, üldisust kitsendamata olgu $x < y < z$. Siis peab iga n korral kehtima kolmnurgavõrratus $x^n + y^n > z^n$ ehk samaväärselt

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 > \left(\frac{z}{y}\right)^n.$$

Et $\frac{x}{y} < 1$, siis iga n korral $\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$. Et $\frac{z}{y} > 1$, siis leidub täisarv N, et iga $n > N$ korral $\left(\frac{z}{y}\right)^n > 2$. Seega kui $n > N$, siis ei saa vaadeldav kolmnurgavõrratus kehtida, sest vasaku poole väärtus on väiksem kui parema poole väärtus. Järelikult peab arvude x, y ja z seas leiduma võrdseid.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Lahendus 1. a) Oletame, et leidub selline kolmnurk ABC. Siis peavad vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ olema täisarvuliste koordinaatidega. Olgu $\overrightarrow{AB} = (x, y)$. Küljele AB tõmmatud kõrgusvektor on $\frac{\sqrt{3}}{2}(y, -x)$, sest niisugune vektor on risti vektoriga $\overrightarrow{AB}$ ja tema pikkus on võrdne küljele AB joonestatud võrdkülgse kolmnurga kõrgusega. Vektori $\overrightarrow{AC}$ koordinaadid on siis kas

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(x, y) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y, -x) = \left(\frac{x + \sqrt{3}y}{2}, \frac{y - \sqrt{3}x}{2}\right)$$

või

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(x, y) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y, -x) = \left(\frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{y + \sqrt{3}x}{2}\right).$$

Ent kummagi vektori koordinaatides saavad lugejad korraga täisarvud olla ainult juhul $x = y = 0$.

b) Sobib näiteks kolmnurk tippudega $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ ja $C(0, 0, 1)$.

Lahendus 2. a) Üldisust kitsendamata eeldame, et üks kolmnurga tipp on $A(0, 0)$. Võime ka eeldada, et ülejäänud tippude B ja C ordinaadid on mittenegatiivsed ning need tipud ei asu y-teljel, sest koordinaatide vahetamine ja suuna vastupidiseks muutmine ei muuda koordinaatide täisarvulisust.

Et kõik koordinaadid on täisarvud, siis on sirgete AB ja AC tõusunurkade tangensid täisarvude suhted ehk ratsionaalarvud. Olgu need tõusunurgad vastavalt β ja γ, siis $\gamma = \beta \pm 60^\circ$. Tähistame $\tan\beta = k$. Summa tangensi valemi põhjal

$$\tan\gamma = \frac{\tan\beta \pm \tan 60^\circ}{1 \mp \tan\beta \tan 60^\circ} = \frac{k \pm \sqrt{3}}{1 \mp k\sqrt{3}} = \frac{(k \pm \sqrt{3})(1 \pm k\sqrt{3})}{1 - 3k^2}.$$

Kuid

$$(k \pm \sqrt{3})(1 \pm k\sqrt{3}) = k \pm k^2\sqrt{3} \pm \sqrt{3} + 3k = 4k \pm (k^2 + 1)\sqrt{3}.$$

Et $k^2 + 1 > 0$, siis siit nähtub, et $\tan\gamma$ ja k ei saa olla korraga ratsionaalarvud.

Lahendus 3. Eeldame väitevastaselt, et tasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvulised. Üldisust kitsendamata eeldame, et selle kolmnurga tipud on $A(0,0)$, $B(x_1, y_1)$ ja $C(x_1, y_1)$, kus arvud x_1, y_1, x_2 ja y_2 on ühistegurita (ühisteguri olemasolul võime punktide B ja C koordinaadid sellega läbi jagada ning saadud kolmnurk on ikka võrdkülgne ja tema tipud on täisarvuliste koordinaatidega). Pythagorase teoreemi kasutades jõuame võrduste ahelani

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Siit järeldub kergesti võrduste ahel

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Järelikult on nii punkti B kui ka punkti C koordinaadid sama paarsusega.

- Et x_1, y_1, x_2 ja y_2 on ühistegurita, siis ei saa need arvud kõik olla paarisarvud.
- Kui x_1 ja y_1 paarisarvud ning x_2 ja y_2 paaritud arvud, siis annab $x_1^2 + y_1^2$ jagamisel 4-ga jäägi 0, aga $x_2^2 + y_2^2$ jäägi 2, mistõttu need ruutude summad ei saa olla võrdsed.
- Kui x_1 ja y_1 on paaritud ning x_2 ja y_2 paarisarvud, siis tekib analoogiline vastuolu.
- Kui x_1, y_1, x_2, y_2 on kõik paaritud, siis annab arv $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ jagamisel 4-ga jäägi 0, aga näiteks arv $x_1^2 + y_1^2$ jäägi 2, vastuolu.

Järelikult sellist kolmnurka ei leidu.

Lahendus 4. Samamoodi ning samadel eeldustel nagu lahenduses 3 jõuame võrduste ahelani

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = a^2,$$

kus a on kolmnurga küljepikkus. Siit järeldub, et

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 3a^2,$$

ehk täisarv $(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$ jagub 3-ga. Et täisruudud annavad 3-ga jagades ainult jäägid 0 ja 1, siis jaguvad $(x_1 + x_2)^2$ ja $(y_1 + y_2)^2$ ning seega ka $x_1 + x_2$ ja $y_1 + y_2$ arvuga 3. Niisiis $x_1 + x_2 = 3s$ ja $y_1 + y_2 = 3t$, kus s ja t on mingid täisarvud. Järelikult $9(s^2 + t^2) = 3a^2$, millest järeldub, et a^2 jagub 3-ga. Kasutades võrdusi $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = a^2$ ning jällegi täisruutude jääke jagaja 3 järgi, saame, et arvud x_1, y_1, x_2 ja y_2 jaguvad kõik 3-ga. See on vastuolus eeldusega, et need arvud on ühistegurita. Järelikult sellist kolmnurka ei leidu.

Lahendus 5. Eeldame väitevastaselt, et tasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvud. Olgu (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) selle kolmnurga tippude koordinaadid, a küljepikkus ja S pindala. Ühelt poolt

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

on täisarv. Teiselt poolt on arv $a^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ samuti täisarv, mistõttu

$$2S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

on irratsionaalarv. Jõudsime vastuoluni. Järelikult sellist kolmnurka ei leidu.

4. *Vastus:* b) Sobivad näiteks $a = 6$, $b = 10$, $c = 15$.

Lahendus 1. a) Olgu $d = \text{SÜT}(a, b)$ ning $a = a'd$ ja $b = b'd$, kusjuures $\text{SÜT}(a', b') = 1$. Siis $\text{VÜK}(a, b) = a'b'd$ ja $\dfrac{\text{VÜK}(a, b)}{\text{SÜT}(a, b)} = a'b'$. Tõestame, et $a'b' = c$.

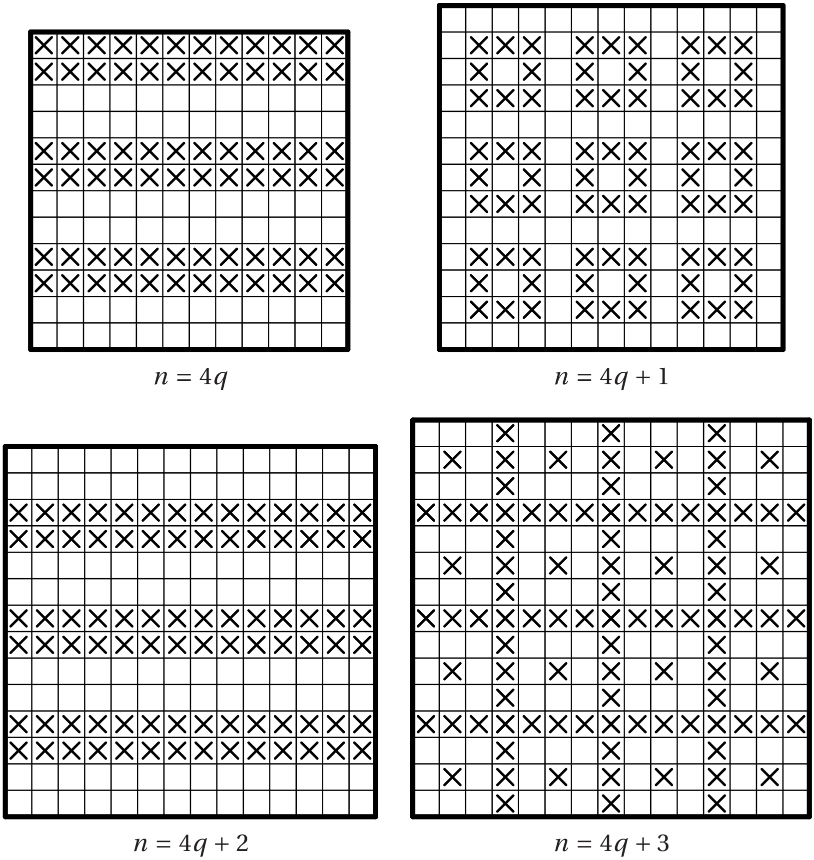
Ühelt poolt, et arv $ab = a'b'd^2$ jagub arvuga c ja tingimuse $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$ tõttu ka $\text{SÜT}(d, c) = 1$, siis $a'b'$ jagub arvuga c. Teiselt poolt, vastavalt ülesande tingimustele $ca = ca'd$ jagub arvuga $b = b'd$ ehk ca' jagub arvuga b'. Et $\text{SÜT}(a', b') = 1$, siis c jagub arvuga b'. Analoogiliselt näitame, et c jagub arvuga a'. Et a' ja b' on ühistegurita, siis jagub c arvuga $a'b'$. Kokkuvõttes seega tõesti $c = a'b'$ ehk ülesande väide kehtib arvu c puhul. Väited arvude a ja b kohta tõestame analoogiliselt.

b) Olgu x, y ja z erinevad paarikaupa ühistegurita arvud, näiteks erinevad algarvud. Võttes $a = xy$, $b = yz$ ja $c = xz$, rahuldavad arvud a, b ja c ülesande tingimusi. Tõepoolest,

$$\frac{\text{VÜK}(a, b)}{\text{SÜT}(a, b)} = \frac{xyz}{y} = xz = c$$

ning analoogiliselt ülejäänud juhtudel. Konkreetse näite saamiseks võime võtta $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$, mis annab arvud 6, 15 ja 10.

Lahendus 2. a) Vaatleme suvalist arvudes a, b ja c esinevat algtegurit p. Et $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$, peab see algtegur ühes arvus puuduma, olgu selleks arvuks näiteks c. Samal ajal, et ca jagub b-ga ja cb jagub a-ga, peab algtegur p esinema arvudes a ja b samas astmes α. Seega on antud kolmes arvus algteguri p astendajad mingis järjekorras α, α ja 0. Neist igaüks võrdub ülejäänud kahest suurima ja vähima vahega. Et selline omadus kehtib iga algteguri korral, siis on iga arv tõepoolest ülejäänud kahe vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatis.

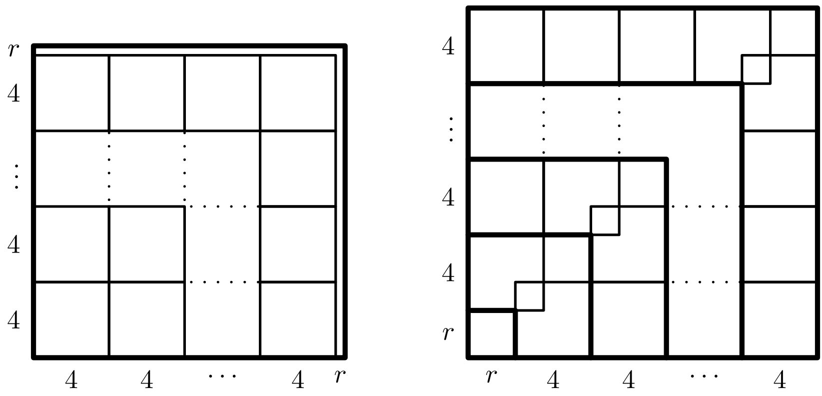


Joonis 9

5. *Vastus:* $8q^2$, kui $n = 4q$ või $n = 4q+1$; $8q^2+4q$, kui $n = 4q+2$; $8q^2+8q+1$, kui $n = 4q+3$ ja $q \geqslant 1$; 0, kui $n = 3$.

Lahendus. Olgu $A(n)$ ülesandes küsitud vähim märgitud ruutude arv. Kõikjal järgnevas olgu $n = 4q + r$, kus $0 \leqslant r < 4$. Uurime kõigepealt $A(n)$ ülemisi piire.

- Kui $r = 0$, siis märgime kõik ruudud kahe rea kaupa, nagu näidatud joonisel 9. Ilmselt saavad täpselt pooled ruudud ehk $8q^2$ tükki märgitud. Seega $A(4q) \leqslant 8q^2$.
- Kui $r = 1$, siis jätame märkimata kõik ruudud esimeses, viiendas, üheksandas jne reas ja veerus, ülejäänud ruudud moodustavad 3×3 rühmad, milles märgime kõik ruudud peale keskmise. Et rühmad moodustavad $q \times q$ tabeli ja igas rühmas on 8 märgitud ruutu, on kokku märgitud $8q^2$ ruutu. Järelikult siingi $A(4q + 1) \leqslant 8q^2$.



Joonis 10

- Kui $r = 2$, siis märgime kõik ruudud kahe rea kaupa, jättes nii alumisest kui ülemisest äärest kaks rida tühjaks. Kahest reast koosnevaid rühmi on q, igas reas on n ehk $4q + 2$ ruutu. Kokku on märgitud $2q(4q + 2)$ ehk $8q^2 + 4q$ ruutu. Seega $A(4q + 2) \leqslant 8q^2 + 4q$.
- Kui $r = 3$ ja $q > 0$, siis märgime kõik ruudud neljandas, kaheksandas, kaheteistkümnendas jne reas ja veerus, ülejäänud ruudud moodustavad 3×3 rühmad, millest igaühes märgime keskmise ruudu. Keskmisi ruute on $(q+1)^2$ tükki, märgitud ridu ja veerge kumbagi q tükki. Järelikult on märgitud ruutude arv $(q+1)^2 + 2(4q+3)q - q^2$ ehk $8q^2 + 8q + 1$. Seega $A(4q+3) \leqslant 8q^2 + 8q + 1$. Kui $r = 3$ ja $q = 0$ ehk $n = 3$, siis ilmselt $A(3) = 0$.

Näitame nüüd, et leitud piirid on ühtlasi alumisteks piirideks.

- Olgu $r = 0$ või $r = 1$. Siis saab $n \times n$ ruudustikus valida ruudu mõõtmetega $4q \times 4q$ ja jaotada see q^2 ruuduks mõõtmetega 4×4 (joonis 10, vasakul). Vastavalt ülesande tingimustele peab igas neist ruutudest olema vähemalt 8 ühikruutu märgitud. Seega kokku peab olema märgitud vähemalt $8q^2$ ühikruutu, ehk $A(n) \geqslant 8q^2$.
- Olgu $r = 2$ või $r = 3$. Eraldame vasakust alumisest nurgast $r \times r$ ruudu ning jaotame ülejäänud ala q ribaks laiusega 4 ühikut, nagu näidatud joonisel 10 paremal. Ribasid on q, nummerdame need arvudega 1 kuni q. Igas ribas eraldame kummastki otsast järjestikused 4×4 ruudud, i-ndas ribas saame neid kokku $2i$. Viimased 4×4 ruudud lõikuvad, lõikumisel tekib $(4 - r) \times (4 - r)$ ruut. Peale selle jääb iga riba nurka üle üks $r \times r$ ruut. Märgitud ruutude arvu hindamiseks liidame kõikides 4×4 ruutudes märgitud ruutude vähima võimaliku arvu, lahutame lõikuvate ruutude ühisosades märgitud ruutude suurima võimaliku arvu

ja liidame ülejäävates $r \times r$ ruutudes märgitud ruutude vähima võimaliku arvu.
Juhul $r = 2$ on märgitud ruutude koguarv seega vähemalt

$$8 \cdot (2 + 4 + \ldots + 2q) - 4 \cdot q + 0 \cdot q = 8 \cdot \frac{(2q + 2)q}{2} - 4q = 8q^2 + 4q.$$

Juhul $r = 3$ arvestame, et igasse 3×3 ruutu (sealhulgas ruutu all vasakul) kuulub vähemalt üks märgitud ruut, mistõttu märgitud ruutude koguarv on vähemalt

$$8 \cdot (2 + 4 + \ldots + 2q) - 1 \cdot q + 1 \cdot (q + 1) = 8 \cdot \frac{(2q + 2)q}{2} + 1 = 8q^2 + 8q + 1.$$

Seega $A(4q + 2) \geqslant 8q^2 + 4q$ ning $A(4q + 3) \geqslant 8q^2 + 8q + 1$.
Märkus. Eeltoodud näidetest nähtub, et iga n korral saab ruudud ristidega märkida nii, et igas 4×4 ruudus on märgitud *täpselt* pooled ruudud.

Hindamisskeemid

1. *(Dmitri Petšonkin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgatud, et arvus ei saa olla numbrit 0 ehk et arv peab lõppma paarisnumbriga: 1 p
- Tõestatud, et arvus ei saa olla numbrit 5: 2 p
- Neljakohaliste arvude kontroll ja märkus et rohkem kui neljakohaline ei saa arv olla: 2 p
- Kolmekohaliste arvude kontroll ja õige vastus: 2 p

2. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $1:2$: 2 p
- Külje AB pikkuse avaldamine ristuvate mediaanide pikkuste kaudu: 2 p
- Külgede AC ja BC pikkuste avaldamine mediaanide kaudu ja veendumine, et AB on tõesti lühim külg: 3 p

3. *(Elts Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võetud kasutusele sobivad tähistused: 1 p
- Koostatud kaks õiget võrrandit: 2 p
- Lisatud selgitused võrrandite koostamise kohta: 1 p
- Lahendatud võrrandid: 2 p
- Leitud küsitud suurused: 1 p

4. *(Emilia Käsper)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Ainult näidatud, kuidas 8 kreeka risti ruudustikku paigutada: 3 p
- Näidatud 8 risti paigutus ja lisaks tehtud mõni kasulik tähelepanek (näiteks märgitud, et ühes reas saab asuda ülimalt kahe risti keskpunkt): 4 p
- Näidatud 8 risti paigutus ja tõestatud, et rohkem riste paigutada ei saa, kuid tõestuse üks samm on korralikult põhjendamata: 5 p
- Täislahendus: 7 p

Kõigis töödes oli leitud 8 risti paigutus. Mitmes lahenduses väideti, et rohkem riste paigutada ei saa, kuna leitud paigutus on „kompaktne“ või muidu „parim võimalik“. Sellised tööd said 3 punkti, kuna põhjendus ei ole matemaatiliselt veenev. Paljud lahendajad olid küll õigesti aru saanud, et alati jääb vabaks vähemalt 20 serva- ja nurgaruutu, kuid see väide oli põhjendamata või oli põhjenduseks toodud üks joonis. Sellised tööd said 5 punkti.

5. *(Peeter Laud)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et mingi kahe kuuli võrdlemata jätmisel ei õnnestu määrata nende omavahelist järjestust, kui need kaks kuuli juhtuvad olema üldises järjestuses teineteise naabrid: 4 p
- Konstateeritud, et vähem kui kümne võrdlemise korral peab mingi kuulipaar läbi võrdlemata jääma: 2 p
- Järeldatud, et ülesandes kirjeldatud viisil võrdlemine ei ole võimalik: 1 p

Kui oli leitud võrdlusviis ainult juhuks, kui võrreldavaid kuule võib valida võrdlemise ajal, siis anti 0 punkti.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 | Lõppvoor | **10. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Nikita Salnikov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 5 p
- b)-osa: 2 p

Kui on ainult tõestatud, et 0 ja 5 ei kuulu arvu koosseisu, siis anti 1 punkt. Kui pole kontrollitud jaguvust 9-ga, siis võeti 2 punkti maha.

2. *(Maksim Ivanov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendus, et sümmeetria tõttu on lõik OQ nurgapoolitaja: 1 p
- Kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad siseringjoone keskpunktis, seega antud ringjoonte keskpunktid ja punkt Q asuvad ühel sirgel: 1 p
- Ringjoone puutuja antud punktis ja sellest punktist tõmmatud raadius on risti: 1 p
- Lisakonstruktsiooni põhjal nurkade leidmine: 4 p

Kui otsitava nurga suurus oli arvutatud õigesti, siis anti selle osa eest anti 4 punkti. Kui üks punktides 1 kuni 3 toodud lausetest oli põhjendamata, siis võeti selle eest 1 punkt maha.

3. *(Kaie Kubjas)* Lahendused, kus oli tõestus leitud mõne erijuhu jaoks, said 2 punkti.

Ülesande tekstis esinev viga (puudus sõna „positiivsete“) lahendamist siiski oluliselt ei mõjutanud – ainult ühes töös oli öeldud, et kui me vaatame ka negatiivseid paarituid arve, siis väide ei kehti. Selle märkuse eest anti 1 punkt. Ülejäänud töödes kõigi paaritute arvude vaatamine lahenduskäiku ei mõjutanud ning paljudes töödes piirdutigi ainult positiivsete paaritute arvudega.

4. *(Uve Nummert)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendus, miks tippude arv saab olla piires 3-st 12-ni: 1 p
- Näited 3 kuni 12 tipu kohta, v.a 11: 4 p
- Põhjendus, miks 11 tippu ei ole võimalik: 2 p

Kui 9-st vajalikust näitest oli esitatud 7–8, sai selle osa eest 3 punkti; 5–6 näite eest 2 punkti ja 3–4 näite eest 1 punkti.

5. *(Konstantin Tretjakov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et identifikaatori numbrite summa on üks võimalik reegel kontrollkoodi arvutamiseks: 3 p
- Selgelt näidatud, et erinevaid kontrollkoode peab olema vähemalt $9n + 1$: 3 p
- Õige lahenduse selge ja korrektne kirjapanek: 1 p

Hindamisskeemid

1. *(Eno Tõnisson)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $x + y = xy$: 2 p
- Juht $y = 1$ eraldi vaadeldud: 1 p
- Avaldise $x = \dfrac{y}{y-1}$ kasutamine: 1 p
- Põhjendatud, et $y = 2$ või $y = 0$: 2 p
- Lõppvastuse leidmine: 1 p

2. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vankri analüüs: 2 p
- Oda analüüs: 5 p

3. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud ülesande väite tarvilikkuse osa, st et kui P asub sirgel AQ, siis AQ ja BC on risti: 4 p
- Tõestatud ülesande väite piisavuse osa, st et kui AQ ja BC on risti, siis P asub sirgel AQ: 3 p

Kui algusest peale on eeldatud, et AB on esimese ringjoone diameeter, siis anti 0 punkti. Kui algusest peale on eeldatud mõlema väite, mille samaväärsust on vaja tõestada, kehtivust, siis anti 0 punkti.

4. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et arvud m ja n peavad olema erineva paarsusega: 1 p
- Ühe paarsuse variandi (näiteks, m on paaris ja n on paaritu) korralik vaatlemine: 3 p
- Vastupidise juhu korralik vaatlemine: 2 p
- Õige vastus: 1 p

Ideede eest, mida eelmises skeemis pole eraldi välja toodud, anti punkte järgmiselt.

- Jääkide vaatlemine mooduli 4 järgi: 1 p
- Jääkide vaatlemine mooduli 8 järgi: 1 p
- Näitamine, et m ja n ei jagu arvuga 3: 1 p

5. *(Mart Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Väide tõestatud juhul, kui on tegemist vaid ühe ringiga või kõik ringid kattuvad: 1 p
- Väide tõestatud juhul, kui ringidel ei ole ühiseid sisepunkte: 1 p
- Väide tõestatud 2 lõikuva ringi jaoks: 2 p
- Väide tõestatud 3 või enama lõikuva ringi jaoks: 3 p

Ideede eest, mida eelmises skeemis pole eraldi välja toodud, anti punkte järgmiselt.

- Tähelepanek, et etteantud ümbermõõduga kujunditest suurima pindalaga on ring: 1 p
- Ringi sektori kaare pikkuse ja sektori pindala õige leidmise eest: 1 p

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 | Lõppvoor | **12. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Hannes Jukk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Leitud koonuse ja silindri ruumala ning kõrguste ja raadiuste vaheline seos: 2 p
   - Eelmine, kuhu on lisandunud seos ruumalade vahel: 3 p
   - Jõutud võrrandini (nt $H^2 - 6Hh + 2h^2 = 0$), kus on kaks kõrgust: 4 p
   - Korrektne lahendus: 7 p

   Arvutusviga vähendas punktide arvu 1 võrra.

2. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Midagi õiget: 1 p
   - Idee on öeldud, kuid ei ole tõestatud või on tõestatud näite abil: 2 p
   - Idee õige, kuid ei ole tõestatud; lisaks vaadeldud erijuhte: 3 p
   - Õigesti alustatud tõestust: 4–5 p
   - Tõestuses esineb pisiviga: 6 p
   - Tõestus täielik: 7 p

3. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - a)-osa: 5 p

     Variant 1 (lahendus mod 4 lisalahenduse järgi).
     - Valitud otstarbekalt kolmnurga ühe tipu koordinaadid ning jõutud võrduseni, millest saab vahetult teha olulisi järeldusi ülejäänud tippude koordinaatide paarsuse kohta: *1 p*
     - Lahenduse lõpuleviimine: *4 p*

     Variant 2 (žürii lahendused).
     - Valitud otstarbekalt kolmnurga ühe tipu koordinaadid ning jõutud võrdusteni, millest saab järeldada vastuolu: *4 p*
     - Lahenduse lõpuleviimine: *1 p*
   - b)-osa: 2 p

   Kommentaarid. Ülesandele leidus mitu lisalahendust: valides ühe kolmnurga tipu koordinaatide alguspunktiks, saab küljepikkuse ruudu avaldisi sobiva mooduli järgi vaadeldes tuletada vastuolu. Jõuti ka lisalahenduseni, mis kasutab kaht kolmnurga pindala avaldist (üks tippude koordinaatide, teine küljepikkuse ruudu kaudu): ühest avaldisest nähtus, et pindala kahekordne on täisarv, teise valemi põhjal aga oli see irratsionaalarv.

4. *(Vladimir Kutšmei)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 5 p
- b)-osa: 2 p

Juhul kui a)-osa tõestus kehtib eeldusel, et SÜT$(a, b) = 1$, siis anti 2 punkti.

5. *(Jan Willemson)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näide $n = 4q$ jaoks: 1 p
- Näide $n = 4q + 1$ jaoks: 1 p
- Näide $n = 4q + 2$ jaoks: 1 p
- Näide $n = 4q + 3$ jaoks: 1 p
- Minimaalsuse tõestus juhul $n = 4q$ või juhul $n = 4q + 1$: 1 p
- Minimaalsuse tõestus juhul $n = 4q + 2$ või juhul $n = 4q + 3$: 2 p