LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **9 класс**

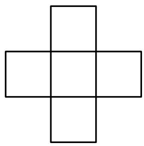
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наибольшее натуральное число, которое делится на каждую свою цифру, а каждая его цифра кроме первой на единицу меньше предыдущей.

2. Медианы треугольника ABC, проведённые из вершин A и B, перпендикулярны друг другу. Доказать, что сторона треугольника AB короче каждой другой его стороны.

3. Директор школы хочет в дополнение к уже имеющимся учителям нанять на работу ещё некоторое количество учителей. Если бы он дополнительно нанял 10 учителей, то количество учеников школы на одного учителя уменьшилось бы на 5. А если бы директор нанял на работу 20 новых учителей, количество учеников на одного учителя уменьшилось бы на 8. Сколько учеников и сколько учителей в этой школе?

4. На рисунке изображён *греческий крест* — фигура, состоящая из 5 единичных квадратов. Чему равно наибольшее число греческих крестов, которое можно полностью и без пересечений между собой выложить на клетчатое поле размерами 8×8, причём каждый единичный квадрат греческого креста покрывал бы ровно одну клетку поля?



5. Юра хочет при помощи рычажных весов без грузов упорядочить по весу пять шаров разного веса. Перед началом взвешивания он нумерует шары числами от 1 до 5 и составляет список взвешиваний, который состоит из пар порядковых номеров шаров (т.е. список — это перечисление таких пар). После этого он по очереди сравнивает для каждой присутствующей в списке пары номеров вес соответствующих двух шаров. Может ли Юра составить список взвешиваний, в котором менее 10 пар, такой, что при его помощи можно в каждом случае полностью определить порядок шаров по весу?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Цифры семизначного натурального числа попарно различны, а само число делится на каждую свою цифру.

а) Найти все возможности, чему могут равняться три цифры, которые это число не содержит.

б) Привести пример такого числа.

2. К окружности c с центром O проведены перпендикулярные радиусы OA и OB. Внутрь сектора, ограниченного этими радиусами, вписывают окружность, которая касается радиусов соответственно в точках C и D, а окружности c в точке Q. Найти величину угла AQC.

3. Доказать, что сумму квадратов трёх различных положительных нечётных целых чисел можно представить в виде суммы квадратов шести (не обязательно различных) положительных целых чисел.

4. Два треугольника располагают на плоскости так, что покрытая ими вместе область является многоугольником (не обязательно выпуклым). Найти все возможные значения количества вершин этого многоугольника.

5. Идентификатор книги состоит из последовательности, в которую входит n членов, каждым из которых может быть одна из цифр $0, 1, \ldots, 9$, а также находящегося в конце натурального числа — *контрольного кода*. Последний вычисляется исходя из последовательности при помощи определённого правила, причём всегда, когда в последовательности увеличивают какую-то одну произвольную цифру (оставив остальные цифры прежними), увеличивается также и соответствующий контрольный код. Чему равно наименьшее возможное число различных контрольных кодов, если все n-членные последовательности цифр задействованы в идентификаторах?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

31 марта 2007 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие действительные числа a, при которых корни квадратного уравнения $x^2 - ax + a = 0$ — целые числа.

2. Дана пространственная шахматная доска размерами $4 \times 4 \times 4$. Пространственная ладья может одним шагом передвинуться из единичного куба K в любой другой единичный куб, имеющий с кубом K общую грань. Пространственный слон может одним шагом передвинуться из единичного куба K в любой другой единичный куб, имеющий с кубом K общее ребро, но не имеющий общей грани. *Ход* как ладьи, так и слона состоит из некоторого положительного числа последовательных шагов в одном направлении. Найти среднее число возможных ходов каждой фигуры, если начальным местом фигуры может быть любой единичный куб шахматной доски.

3. Окружность, проходящая через вершины боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, пересекает основание треугольника BC в точке P. Касательная к этой окружности, проведённая из точки B, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Доказать, что точка P расположена на прямой AQ тогда и только тогда, когда прямая AQ перпендикулярна основанию треугольника BC.

4. Найти все пары (m, n) положительных целых чисел, при которых

$$m^n - n^m = 3.$$

5. На плоскости расположено некоторое число кругов радиуса 2. Доказать, что общая площадь области, покрываемой этими кругами, численно не меньше суммарной длины дуг, ограничивающих эту область.

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Дан прямой цилиндр и прямой конус с общим основанием. Объём той части цилиндра, которая находится внутри конуса, равен объёму части цилиндра, остающейся вне конуса. Найти отношение высоты конуса к высоте цилиндра.

2. Положительные действительные числа x, y и z таковы, что числа x^n, y^n и z^n при каждом натуральном n являются длинами сторон какого-то треугольника. Доказать, что по крайней мере два из чисел x, y и z равны.

3. Найдётся ли

а) на плоскости;

б) в пространстве

равносторонний треугольник, все вершины которого имеют целочисленные координаты?

4. Пусть a, b и c — такие положительные целые числа, что НОД$(a, b, c) = 1$, а произведение любых двух чисел делится на третье.

а) Доказать, что каждое из этих чисел является отношением наименьшего общего кратного и набольшего общего делителя двух остальных чисел.

б) Привести пример таких чисел a, b и c, каждое из которых больше единицы.

5. В клетчатом поле размерами $n \times n$ часть клеток отмечают крестиками так, что в каждом квадрате 4×4 отмечена по крайней мере половина клеток. Найти наименьшее возможное количество отмеченных клеток в клетчатом поле.