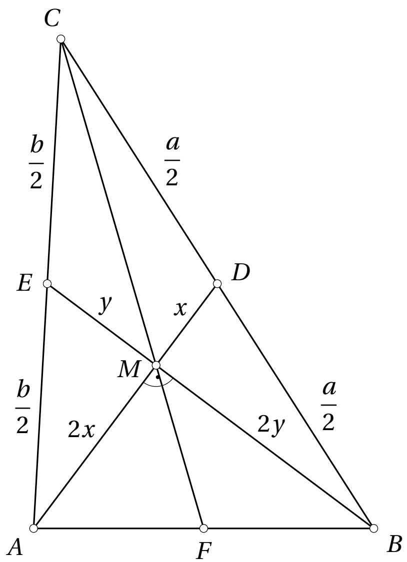
Lahendused

1. *Vastus:* 432.

   Ilmselt ei saa see arv sisaldada numbrit 0. Iga vähemalt kahekohaline nõutud omadusega arv sisaldab paarisnumbrit ning peab seega olema paarisarv, st tema viimane number peab olema paaris. Seega ei saa selline arv sisaldada ka numbrit 5, sest siis peaks ta jaguma 5-ga ehk lõppema 0-ga või 5-ga. Seega saab otsitav arv olla ülimalt neljakohaline. Ainus kõne alla tulev neljakohaline arv on 9876, mis aga ei jagu 8-ga (tegelikult ka mitte 7-ga ega 9-ga). Kolmekohalistest arvudest tulevad kõne alla 876, mis ei jagu 8-ga (ega ka 7-ga), ning 432, mis sobib.

2. *Lahendus 1.* Olgu M mediaanide lõikepunkt ning F tipust C tõmmatud mediaani aluspunkt (joonis 1). Punkt F on siis täisnurkse kolmnurga ABM hüpotenuusi keskpunkt ehk kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Seetõttu $|AB| = 2|FM|$ Et mediaanide lõikepunkt M jaotab mediaani CF suhtes $2 : 1$, siis $2|FM| = |CM|$. Järelikult $|AB| = |CM|$. Kolmnurgas AMC



Joonis 1

suurim nurk on $\angle AMC$, sest see on nürinurk, ning selle nurga vastas asub kolmnurga pikim külg. Seega $|AC| > |MC|$ ehk AC on pikem kui AB. Analoogiliselt tõestame, et BC on pikem kui AB.

Lahendus 2. Olgu D ja E vastavalt kolmnurga tippudest A ja B tõmmatud mediaanide aluspunktid. Tähistame $|MD| = x$ ja $|ME| = y$. Siis $|AM| = 2x$ ning $|BM| = 2y$. Pythagorase teoreemist kolmnurgas ABM saame

$$|AB|^2 = 4x^2 + 4y^2.$$

Kolmnurgast AME saame samamoodi $|AE|^2 = 4x^2 + y^2$. Et $|AE| = \dfrac{|AC|}{2}$, siis

$$|AC|^2 = 4 \cdot (4x^2 + y^2) = 16x^2 + 4y^2.$$

Analoogiliselt

$$|BC|^2 = 4 \cdot (x^2 + 4y^2) = 4x^2 + 16y^2.$$

Siit näeme, et $|AC|^2 > |AB|^2$ ja $|BC|^2 > |AB|^2$, mis tähendab, et kolmnurga küljed AC ja BC on pikemad kui külg AB.

3. *Vastus:* 600 õpilast ja 30 õpetajat.

Olgu x õpilaste arv ja y õpetajate arv koolis. Siis ühe õpetaja kohta tuleb $\dfrac{x}{y}$ õpilast. Kui lisanduks 10 uut õpetajat, siis oleks õpilaste arv ühe õpetaja kohta $\dfrac{x}{y+10}$. Seega saame võrrandi

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y+10} + 5,$$

millest pärast teguriga $y(y+10)$ korrutamist $xy + 10x = xy + 5y(y+10)$ ehk $x = \dfrac{1}{2}y(y+10)$.

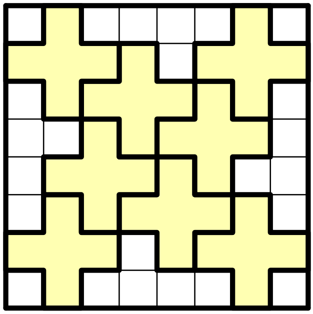
Kui aga lisanduks 20 uut õpetajat, siis oleks õpilaste arv ühe õpetaja kohta $\dfrac{x}{y+20}$ ning me saame võrrandi

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y+20} + 8.$$

Siit $xy + 20x = xy + 8y(y+20)$ ehk $x = \dfrac{2}{5}y(y+20)$.

Järelikult peab kehtima võrdus

$$\frac{1}{2}y(y+10) = \frac{2}{5}y(y+20),$$



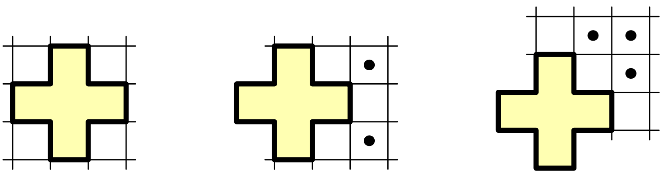
Joonis 2

millest pärast 10-ga korrutamist saame $5y(y+10) = 4y(y+20)$ ning pärast liikmete ühele poole toomist $y(5y+50-4y-80) = 0$ ehk $y(y-30) = 0$. Siit $y = 30$, sest y peab olema positiivne. Järelikult $x = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (30+10) = 600$. Koolis on seega 600 õpilast ja 30 õpetajat.

4. *Vastus:* 8.

Lahendus 1. Ruudustiku igal serval paiknevast 8 ruudust saab ristidega kaetud olla ülimalt 2 (sest 3 risti kõrvuti ei mahu). Seega saab servades kaetud olla ülimalt $4 \cdot 2 = 8$ ruutu. Ruute, mis ei asu servadel, on kokku $6 \cdot 6 = 36$. Järelikult saab ruudustikus kokku kaetud olla $8 + 36 = 44$ ruutu. Et rist koosneb 5 ruudust, siis saab riste olla ülimalt 8. Täpselt 8 risti on võimalik ruudustikule paigutada, nagu näitab joonis 2.

Lahendus 2. Tõestame, et ruudustiku suvalises 3×3 ruudus saavad paikneda ülimalt 2 risti keskmised ruudud (joonis 3). Kui ühe risti keskmine ruut katab 3×3 ala keskmise ruudu, siis ei saa enam ühegi risti keskmine ruut selle 3×3 ala kohal olla. Kui ühe risti keskmine ruut katab 3×3 ala ühe ääreruudu, mis pole nurgas, siis saab teise risti paigutada küll kahel viisil, kuid mõlemat korraga paigutades tekiks omavaheline kattumine. Kui ühe risti keskmine ruut katab 3×3 ala nurgaruudu, siis saab teise risti paigutada kolmel viisil, kuid ükskõik millised kaks neist samal põhjusel välistavad teineteist.



Joonis 3

Antud 8×8 ruudustikule paigutatud risti keskmine ruut ei saa asuda selle ala äärel, vaid peab asuma sisemises 6×6 alas. Jaotame selle neljaks 3×3 alaks. Igaühes neist saab eelpool öeldut arvesse võttes asuda ülimalt 2 risti keskmine ruut. Seega kokku saab olla ülimalt 4×2 ehk 8 risti. Selles, et täpselt 8 risti saab paigutada, veendume nagu lahenduses 1.

5. *Vastus:* ei.

Viie kuuli puhul on võimalik võrrelda 10 erinevat kuulide paari:

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5).$$

Kui nimekirjast on mõni paar puudu, näiteks $(1,2)$, siis ei ole võimalik eristada kaalujärjestust 1, 2, 3, 4, 5 kaalujärjestusest 2, 1, 3, 4, 5, sest kõik ülejäänud kaalumised annavad nende korral sama tulemuse. Järelikult peavad sobivas nimekirjas kõik 10 paari esindatud olema.

Lahendused

1. *Vastus:* a) 0, 4 ja 5; b) sobib näiteks 7639128.

a) Ilmselt ei saa see arv sisaldada numbrit 0. Iga nõutud omadusega arv sisaldab paarisnumbreid ning peab seega olema paarisarv, st tema viimane number peab olema paaris. Seega ei saa selline arv sisaldada ka numbrit 5, sest siis peaks ta jaguma 5-ga ehk lõppema 0-ga või 5-ga. Et ülejäänud 8 numbri summa on 40, siis saab see arv jaguda 9-ga (ja seega sisaldada numbrit 9) vaid juhul, kui kolmandana jääb välja number 4. Kui see arv aga 9-ga ei jaguks, siis jääks kolmandana välja number 9 ning arvu numbrite summa oleks 31, mistõttu see arv ei jaguks ka 3-ga – vastuolu.

b) Otsitav arv jagub kindlasti 3-ga ja 9-ga, sest tema numbrite summa on 36. Paigutame arvu lõppu numbrid 128, siis jagub arv kindlasti 2-ga, 4-ga, 6-ga ja 8-ga. Et arv jaguks 7-ga, paneme numbri 7 esimesele kohale, siis võib ta vaatluse alt ära jätta, kahele järgmisele kohale paneme 63, mille võib ka seejärel vaatluse alt välja jätta. Järele jääb number 9 ja arv 9128, mis ilmselt jagub 7-ga.

Märkus. Üldse leidub 105 ülesande tingimustele vastavat arvu.

2. *Vastus:* 45°.

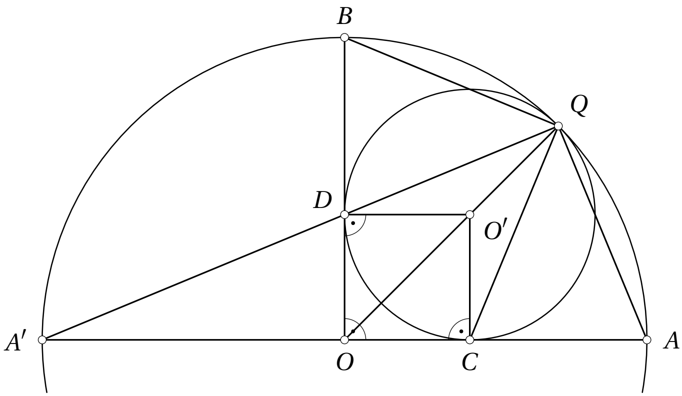
Lahendus 1. Sümmeetria tõttu ilmselt $\angle AQC = \angle BQD$ (joonis 4). Et nurk AQB on korrapärase kaheksanurga sisenurk, siis

$$\angle AQB = \frac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ.$$

Olgu O' punkte C, D ja Q läbiva ringjoone keskpunkt. Nelinurgas $OCO'D$ on kolm nurka täisnurgad: nurk COD eelduse põhjal, nurgad OCO' ja ODO' aga moodustuvad raadiuse ja puutuja vahel. Seega on ka $CO'D$ täisnurk, mistõttu $\angle CQD = \frac{1}{2}\angle CO'D = 45^\circ$ ja

$$\angle AQC = \frac{1}{2}(\angle AQB - \angle CQD) = \frac{1}{2}(135^\circ - 45^\circ) = 45^\circ.$$

Lahendus 2. Olgu O' punkte C, D ja Q läbiva ringjoone keskpunkt ning A' ringjoone c punktist A tõmmatud diameetri teine otspunkt. Võrdhaarsed kolmnurgad $QO'D$ ja QOA' on sarnased, sest nende tipunurgad on



Joonis 4

võrdsed sirgete $O'D$ ja AA' paralleelsuse tõttu. See tähendab, et sirge QD läbib punkti A'. Järelikult toetub nurk AQA' diameetrile ning on seega täisnurk. Sümmeetria tõttu $\angle DQO = \angle OQC = \angle QCO'$. Seega $\angle OQA = 90^\circ - \angle DQO = 90^\circ - \angle QCO' = \angle ACQ$. Nüüd näeme, et kolmnurgad QAO ja ACQ on sarnased, sest neil on kaks vastavalt võrdset nurka. Seega $\angle AQC = \angle QOA = 45^\circ$.

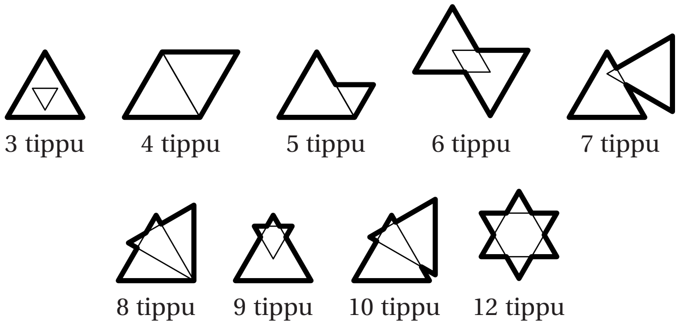
Lahendus 3. Olgu O' punkte C, D ja Q läbiva ringjoone keskpunkt. Ringjoone c raadius on ühelt poolt $|OC|+|CA|$, teiselt poolt aga $|OO'|+|O'Q|$. Et $OCO'D$ on ristkülik, sest tal on kolm täisnurka, siis $|OC| = |O'D| = |O'Q|$. Järelikult $|CA| = |OO'| = |DC|$. Sümmeetria tõttu ka $|QC| = |QD|$. Teoreem lõikajast ja puutujast annab $\angle ACQ = \angle CDQ$. Seega on kolmnurgad AQC ja CQD sarnased. Järelikult $\angle AQC = \angle CQD$. Kasutades veelkord teoreemi lõikajast ja puutujast, saame edasi $\angle CQD = \angle OCD = 45^\circ$, sest OCD on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

3. Olgu a, b ja c vaadeldavad arvud, üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a > b > c$. Kehtivad seosed

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} =$$
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

Et a, b ja c on paaritud, siis on kõik sulgudes olevad arvud positiivsed täisarvud.

Märkus. Ülesande tekstis oli viga – puudus sõna „positiivsete“. Kui arvude seas võib olla ka negatiivseid, siis väide ei kehti, näiteks $(-1)^2 + 1^2 + 3^2 = 11$ pole esitatav 6 positiivse täisarvu ruutude summana.



Joonis 5

4. *Vastus:* kõik täisarvud 3-st 12-ni, välja arvatud 11.

Igal saadaval hulknurgal on ilmselt vähemalt 3 tippu. Näitame, et hulknurgal ei saa olla rohkem kui 12 tippu. Tõepoolest, saadava hulknurga tippudeks saavad olla ainult nende kahe kolmnurga tipud ning ühe kolmnurga külgede lõikepunktid teise kolmnurga külgedega. Esimest liiki tippe saab hulknurgal olla ülimalt 6, teist liiki tippe samuti ülimalt 6, sest esimese kolmnurga iga külg saab lõigata ülimalt kahte teise kolmnurga külge.

Näitame, et 11 tipuga hulknurk ei ole võimalik. Tõepoolest, siis peaksid neist 11 tipust olema kas 6 kolmnurkade tipud ja 5 külgede lõikepunktid või vastupidi. Esiteks, kui hulknurgal on 6 tippu on kolmnurkade tipud, siis ei tohi kummagi kolmnurga ükski tipp paikneda teise kolmnurga sees. Seega lõikab kummagi kolmnurga iga külg kas 0 või 2 teise kolmnurga külge ning külgede lõikepunkte ei saa olla paaritu arv. Teiseks, kui hulknurgal on 6 tippu, mis on moodustunud esialgsete kolmnurkade külgede lõikepunktidena, siis lõikab kummagi kolmnurga iga külg teise kolmnurga kaht külge, mistõttu kummagi kolmnurga ükski tipp ei saa paikneda teise kolmnurga sees (siis sellest tipust lähtuvad servad lõikaksid kumbki ülimalt ühte teise kolmnurga külge). Järelikult on ka kolmnurkade kõik 6 tippu vaadeldava hulknurga tippudeks.

Kõik ülejäänud tippude arvud 3-st 12-ni on võimalikud, nagu näitab joonis 5.

5. *Vastus:* $9n+1$.

Jadale $(0,0,\ldots,0)$ vastab mingi üks kontrollkood. Muutes esimest numbrit jadas sammukaupa suuremaks, saame jadad $(1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $(9,0,\ldots,0)$, millest tekib veel 9 erinevat kontrollkoodi. Muutes nüüd viimati saadud jadas analoogiliselt teist numbrit sammukaupa suuremaks, saame jadad $(9,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(9,9,\ldots,0)$, millest tekib veel 9 kontrollkoodi. Iga numbri muutmisel saame 9 uut koodi, koos esialgsega peab koode kokku olema seega vähemalt $9n+1$.

Tõestame, et koode saab olla täpselt $9n + 1$. Loeme jada koodiks jada liikmete summa. See rahuldab ülesande tingimusi, sest alati, kui jada mõnda ühte numbrit suurendatakse, suureneb ka numbrite summa. Kuid numbrite summa saab muutuda ainult piirides 0 kuni $9n$, kuhu kuulub $9n + 1$ arvu. Seega on erinevaid koode antud juhul ülimalt $9n + 1$. Et neid ei saa lahenduse esimese osa põhjal ka vähem olla, peab erinevaid koode olema täpselt $9n + 1$.

Lahendused

1. *Vastus:* 0 ja 4.

Lahendus 1. Olgu x ja y vaadeldava ruutvõrrandi lahendid. Viète'i valemitest $x + y = xy = a$. Juhul $y = 1$ saame vastuolulise võrduse $1 + x = x$, muidu aga

$$x = \frac{y}{y-1}.$$

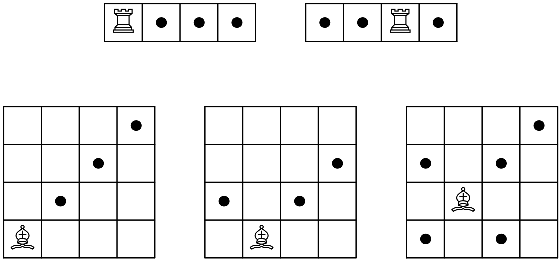
Siin on tegemist kahe järjestikuse täisarvu jagatisega, mis saab olla täisarv ainult juhtudel $y = 2$ ja $y = 0$. Tõepoolest, kui $y > 2$, siis $2 > \frac{y}{y-1} > 1$; kui aga $y < 0$, siis $1 > \frac{y}{y-1} > 0$. Nüüd, kui $y = 2$, siis $x = 2$, mistõttu $a = x + y = 4$; kui aga $y = 0$, siis $x = 0$ ja $a = x + y = 0$.

Lahendus 2. Ruutvõrrandi lahendivalemist $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$ näeme, et nullkohtade summa on a ja nullkohtade vahe on $\sqrt{a^2 - 4a}$. Kui nullkohad on täisarvud, siis on nii nende vahe kui ka summa täisarvud. Järelikult on a täisarv ja $a^2 - 4a$ on täisruut. Siin $a^2 - 4a = (a - 2)^2 - 4$. See arv ei saa olla täisruut, kui $(a - 2)^2 \geqslant 9$, sest siis erineks $(a - 2)^2$ eelmisest täisruudust rohkem kui 4 võrra. Et ilmselt ei saa see arv olla täisruut ka juhul $(a - 2)^2 < 4$, siis ainsa võimalusena jääb järele $(a - 2)^2 = 4$, millest $a = 0$ või $a = 4$. Kontroll näitab, et kummalgi juhul on $x^2 - ax + a = 0$ lahendid täisarvulised.

2. *Vastus:* vankri puhul 9, oda puhul 10,5.

Vankri puhul on ühes sihis liikumiseks alati 3 erinevat võimalust (joonis 6) ning kõigi kolme sihi peale seega 9 võimalust. Et käiguvõimaluste arv ei sõltu siin lähtekuubist, siis on ka keskmine käiguvõimaluste arv 9.

Kui oda asub malelaua „tsentris“ ehk ühikkuubis, mis ei piirne malelaua tahuga, siis on tal mingi tahuga paralleelsel tasandil 5 käiguvõimalust. Et selliseid tasandeid on 3, siis on odal tsentris asudes $3 \times 5 = 15$ käiguvõimalust. Tsentrikuupe on ilmselt 8. Kui oda asub ühikkuubis, mis piirneb malelaua tahuga, aga mitte servaga, siis on tal vastava tahuga paralleelsel tasandil 5 käiguvõimalust, ülejäänud kahel tasandil aga 3 käiguvõimalust, kokku $5+3+3 = 11$. Et kuubil on 6 tahku ja iga tahuga piirneb 4 vaadeldavat liiki ühikkuupi, siis on selliseid ühikkuupe kokku $6 \cdot 4 = 24$. Ülejäänud



Joonis 6

juhtudel asub oda kõigi kolme tasandi suhtes malelaua äärel, sel juhul on tal igal tasandil 3 käiguvõimalust, kokku $3 \cdot 3 = 9$. Võimalikke lähtekuupe on $64 - 8 - 24 = 32$. Keskmine käiguvõimaluste arv on kokkuvõttes

$$\frac{8 \cdot 15 + 24 \cdot 11 + 32 \cdot 9}{64} = 10{,}5.$$

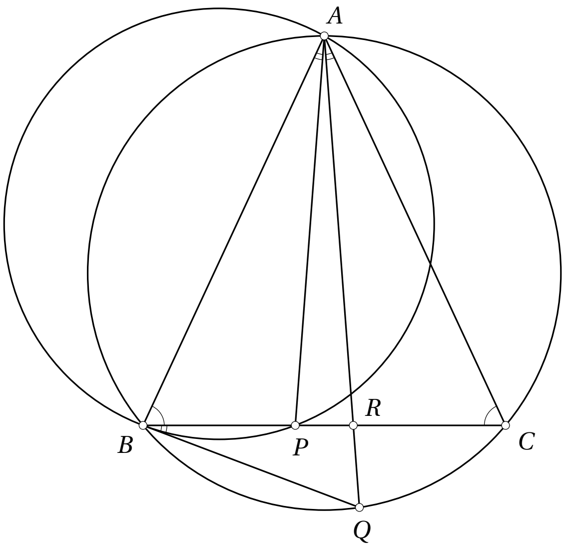
Märkus. Malendi käiguvõimaluste arv iseloomustab teataval määral malendi tugevust. Lahendusest nähtub, et „ruumilises“ males võiks oda olla vankrist tugevam („tasandilises“ males on vastupidi). Samas kahandab oda tugevust asjaolu, et talle on ikka kättesaadavad ainult pooled malelaua väljad, erinevalt vankrist.

Et $4 \times 4 \times 4$ ruumilisel malelaual on väljade arv sama nagu 8×8 tasandilisel malelaual, siis saab ruumiliste malendite tugevust võrrelda ka tavaliste malendite tugevusega. Viimaste puhul on näiteks vankril alati 14 käiguvõimalust ja odal keskmiselt 8,75.

3. *Lahendus 1.* Olgu R sirge AQ lõikepunkt alusega BC (joonis 7). Ühelt poolt kolmnurga võrdhaarsuse tõttu $\angle ACR = \angle ABP$, teiselt poolt aga, kasutades teoreemi puutujast ja lõikajast, $\angle CAR = \angle CBQ = \angle PAB$. Järelikult on kolmnurgad ACR ja ABP sarnased. Kui $AQ \perp BC$, siis AR on kõrgus ning $\angle ARC = \angle APB = 90^\circ$. Siit $P = R$, mis tähendabki, et P asub sirgel AQ. Kui aga P asub sirgel AQ, siis $P = R$, mis annab $\angle CRA = \angle CPA = 180^\circ - \angle BPA = 180^\circ - \angle CRA$ ehk $\angle CRA = 90^\circ$ ehk $AQ \perp BC$.

Lahendus 2. Vaatleme algul juhtu, kus AB on punktidega A, B ja P määratud ringjoone diameeter. Siis $\angle APB = 90^\circ$ ja $\angle QBA = 90^\circ$. Viimasest võrdusest saame, et AQ on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Võrdhaarse kolmnurga tipust tõmmatud diameeter on aga risti alusega. Seega $AQ \perp BC$ ja P asub sirgel AQ.

Teiselt poolt, kui haara AB otspunkte läbiva ringjoone keskpunkt nihkub haarast AB kaugemale pooltasandil, millele jääb punkt C, siis punkt Q



Joonis 7

nihkub punkti B poole, punkt P aga punkti C poole. Seega P ei saa asuda sirgel AQ ega AQ olla küljega BC risti. Samuti, kui ringjoone keskpunkt nihkub haarast AB kaugemale teisel pooltasandil, siis punkt Q nihkub punkti C poole, punkt P aga punkti B poole. Seega ka sel juhul ei saa P asuda sirgel AQ ega AQ olla BC-ga risti.

4. *Vastus:* $(4, 1)$.

Kui m ja n oleksid sama paarsusega, siis oleks võrduse vasak pool paaris. Järelikult peavad m ja n olema erineva paarsusega.

- Kui m on paaritu ja n paaris, siis m^n annab 4-ga jagades jäägi 1. Järelikult peab n^m andma 4-ga jagades jäägi 2. See on võimalik ainult siis, kui $m = 1$. Siis aga $m^n = 1$ ning võrduse vasaku poole väärtus oleks väiksem kui 3. Seega sel juhul lahendeid ei leidu.
- Kui m on paaris ja n paaritu, siis n^m annab 8-ga jagades jäägi 1. Siis aga m^n annab 8-ga jagades jäägi 4. See tähendab, $n \leqslant 2$ ning et n on paaritu, siis $n = 1$, millest $m = 4$.

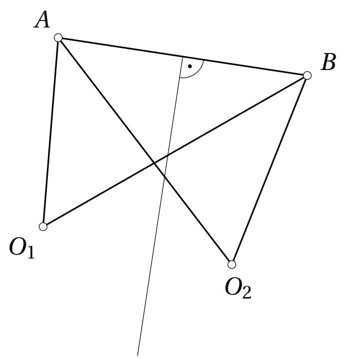
5. *Lahendus 1.* Kujundi rajajoon koosneb ringjoonte kaartest. Konstrueerime iga sellise kaare jaoks ringi sektori, mis toetub sellele kaarele. Vastavalt sektori pindala valemile $S = \dfrac{rl}{2}$, kus r on ringi raadius ja l kaare pikkus, saame, et juhul $r = 2$ võrdub sektori pindala arvuliselt sama sektori kaare pikkusega.

Tõestame, et ühelgi kahel sektoril ei ole ühiseid sisepunkte. Kui kaks sektorit kuuluvad samale ringile, siis on nende ainus ühine punkt ringi keskpunkt. Eeldame nüüd, et üks sektor kuulub ringile w_1 keskpunktiga O_1 ja teine ringile w_2 keskpunktiga O_2. Kui sektoritel leidub ühine sisepunkt C, siis tõmbame läbi selle ringidele w_1 ja w_2 vastavalt raadiused O_1A ja O_2B. Ilmselt asuvad A ja B ringidega kaetud ala rajajoonel. Siis B ei asu ringi w_1 sisepiirkonnas ja A ei asu ringi w_2 sisepiirkonnas. Järelikult $|O_1B| \geqslant |O_1A|$ ja $|O_2A| \geqslant |O_2B|$. Tõmbame lõigu AB keskristsirge (joonis 8). Viimased võrratused näitavad, et punkt O_1 asub keskristsirgest samal pool nagu punkt A ning punkt O_2 samal pool nagu punkt B. Järelikult ei saa lõikudel O_1A ja O_2B olla ühiseid punkte, vastuolu.

Seega saame, et kogu kujundi rajajoone pikkus võrdub sektorite kaarte pikkuste summaga, kujundi pindala on aga vähemalt niisama suur kui sektorite kogupindala.

Lahendus 2. Tõestame väite matemaatilise induktsiooniga ringide arvu järgi. Ühe ringi korral on nii pindala kui ka ümbermõõt võrdsed arvuga 4π. Ühe ringi lisandumisel tuleb nii kaetud ala pindalale kui piiravate joonte pikkusele liita 4π, kuid lisaks tuleb vastavalt lahutada uue ringi ja senise kujundi ühisosa pindala ja seda piiravate joonte pikkus. Seega piisab tõestada, et tekkiva ühisosa iga sidusa komponendi pindala on ülimalt niisama suur kui ümbermõõt.

Kui ühisosa sidusa komponendi ümbermõõt on suurem kui 4π, siis väide kehtib, sest komponendi pindala ei saa olla suurem kui 4π. Kui aga ümbermõõt on väiksem kui 4π, siis avaldame ta kujul $2\pi r$, kus $r \leqslant 2$. Kasutades fakti, et sama ümbermõõdu juures on suurim pindala ringil, näeme, et ühisosa pindala ei saa ületada suurust πr^2. Tingimuse $r \leqslant 2$ tõttu $\pi r^2 \leqslant 2\pi r$, st pindala ei ületa ümbermõõtu.



Joonis 8

Lahendused

1. *Vastus:* $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Olgu V ja V_k vastavalt silindri ja koonuse ruumala, h ja H vastavalt silindri ja koonuse kõrgus ning S nende ühine põhjapindala. Koonuse tipp ulatub silindrist väljapoole, sest vastasel korral moodustaks nende kehade ühisosa ülimalt $\frac{1}{3}$ silindri ruumalast ja silindri ülejäänud osa vähemalt $\frac{2}{3}$, nagu nähtub koonuse ja silindri ruumala valemite võrdlemisel.

Tähistame lühiduse mõttes $\frac{h}{H} = x$. Silindrist väljapoole jääv koonuse osa on antud koonusega sarnane koonus sarnasusteguriga $\frac{H-h}{H} = 1-x$, tema ruumala on järelikult $(1-x)^3 V_k$. Silindri sisse jääva koonuse osa ruumala on siis $V_k - (1-x)^3 V_k = (1-(1-x)^3) V_k = (x^3 - 3x^2 + 3x) V_k$. Ülesande tingimuste järgi võrdub see poolega silindri ruumalast. Et $V = Sh$ ja $V_k = \frac{1}{3} SH$, siis $\frac{1}{2} V = \frac{3}{2} \frac{h}{H} V_k = \frac{3}{2} x V_k$. Seega saame võrrandi

$$(x^3 - 3x^2 + 3x)\, V_k = \frac{3}{2} x\, V_k$$

ehk $x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$, mille lahendid on $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$. Et $\frac{3+\sqrt{3}}{2} > 1$, kuid $h < H$ tõttu $x < 1$, siis sobib ainult lahend $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Koonuse kõrguse suhe silindri kõrgusesse on

$$\frac{H}{h} = \frac{1}{x} = \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Eeldame, et arvud x, y ja z on kõik erinevad, üldisust kitsendamata olgu $x < y < z$. Siis peab iga n korral kehtima kolmnurgavõrratus $x^n + y^n > z^n$ ehk samaväärselt

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 > \left(\frac{z}{y}\right)^n .$$

Et $\dfrac{x}{y} < 1$, siis iga n korral $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n < 1$. Et $\dfrac{z}{y} > 1$, siis leidub täisarv N, et iga $n > N$ korral $\left(\dfrac{z}{y}\right)^n > 2$. Seega kui $n > N$, siis ei saa vaadeldav kolmnurgavõrratus kehtida, sest vasaku poole väärtus on väiksem kui parema poole väärtus. Järelikult peab arvude x, y ja z seas leiduma võrdseid.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Lahendus 1. a) Oletame, et leidub selline kolmnurk ABC. Siis peavad vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ olema täisarvuliste koordinaatidega. Olgu $\overrightarrow{AB} = (x, y)$. Küljele AB tõmmatud kõrgusvektor on $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(y, -x)$, sest niisugune vektor on risti vektoriga $\overrightarrow{AB}$ ja tema pikkus on võrdne küljele AB joonestatud võrdkülgse kolmnurga kõrgusega. Vektori $\overrightarrow{AC}$ koordinaadid on siis kas

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(x, y) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y, -x) = \left(\frac{x + \sqrt{3}y}{2}, \frac{y - \sqrt{3}x}{2}\right)$$

või

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(x, y) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y, -x) = \left(\frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{y + \sqrt{3}x}{2}\right)$$

Ent kummagi vektori koordinaatides saavad lugejad korraga täisarvud olla ainult juhul $x = y = 0$.

b) Sobib näiteks kolmnurk tippudega $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ ja $C(0, 0, 1)$.

Lahendus 2. a) Üldisust kitsendamata eeldame, et üks kolmnurga tipp on $A(0, 0)$. Võime ka eeldada, et ülejäänud tippude B ja C ordinaadid on mittenegatiivsed ning need tipud ei asu y-teljel, sest koordinaatide vahetamine ja suuna vastupidiseks muutmine ei muuda koordinaatide täisarvulisust.

Et kõik koordinaadid on täisarvud, siis on sirgete AB ja AC tõusunurkade tangensid täisarvude suhted ehk ratsionaalarvud. Olgu need tõusunurgad vastavalt β ja γ, siis $\gamma = \beta \pm 60^\circ$. Tähistame $\tan\beta = k$. Summa tangensi valemi põhjal

$$\tan\gamma = \frac{\tan\beta \pm \tan 60^\circ}{1 \mp \tan\beta \tan 60^\circ} = \frac{k \pm \sqrt{3}}{1 \mp k\sqrt{3}} = \frac{(k \pm \sqrt{3})(1 \pm k\sqrt{3})}{1 - 3k^2}.$$

Kuid

$$(k \pm \sqrt{3})(1 \pm k\sqrt{3}) = k \pm k^2\sqrt{3} \pm \sqrt{3} + 3k = 4k \pm (k^2 + 1)\sqrt{3}.$$

Et $k^2 + 1 > 0$, siis siit nähtub, et $\tan\gamma$ ja k ei saa olla korraga ratsionaalarvud.

Lahendus 3. Eeldame väitevastaselt, et tasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvulised. Üldisust kitsendamata eeldame, et selle kolmnurga tipud on $A(0,0)$, $B(x_1, y_1)$ ja $C(x_1, y_1)$, kus arvud x_1, y_1, x_2 ja y_2 on ühistegurita (ühisteguri olemasolul võime punktide B ja C koordinaadid sellega läbi jagada ning saadud kolmnurk on ikka võrdkülgne ja tema tipud on täisarvuliste koordinaatidega). Pythagorase teoreemi kasutades jõuame võrduste ahelani

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Siit järeldub kergesti võrduste ahel

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Järelikult on nii punkti B kui ka punkti C koordinaadid sama paarsusega.

- Et x_1, y_1, x_2 ja y_2 on ühistegurita, siis ei saa need arvud kõik olla paarisarvud.
- Kui x_1 ja y_1 paarisarvud ning x_2 ja y_2 paaritud arvud, siis annab $x_1^2 + y_1^2$ jagamisel 4-ga jäägi 0, aga $x_2^2 + y_2^2$ jäägi 2, mistõttu need ruutude summad ei saa olla võrdsed.
- Kui x_1 ja y_1 on paaritud ning x_2 ja y_2 paarisarvud, siis tekib analoogiline vastuolu.
- Kui x_1, y_1, x_2, y_2 on kõik paaritud, siis annab arv $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ jagamisel 4-ga jäägi 0, aga näiteks arv $x_1^2 + y_1^2$ jäägi 2, vastuolu.

Järelikult sellist kolmnurka ei leidu.

Lahendus 4. Samamoodi ning samadel eeldustel nagu lahenduses 3 jõuame võrduste ahelani

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = a^2,$$

kus a on kolmnurga küljepikkus. Siit järeldub, et

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 3a^2,$$

ehk täisarv $(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$ jagub 3-ga. Et täisruudud annavad 3-ga jagades ainult jäägid 0 ja 1, siis jaguvad $(x_1 + x_2)^2$ ja $(y_1 + y_2)^2$ ning seega ka $x_1 + x_2$ ja $y_1 + y_2$ arvuga 3. Niisiis $x_1 + x_2 = 3s$ ja $y_1 + y_2 = 3t$, kus s ja t on mingid täisarvud. Järelikult $9(s^2 + t^2) = 3a^2$, millest järeldub, et a^2 jagub 3-ga. Kasutades võrdusi $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = a^2$ ning jällegi täisruutude jääke jagaja 3 järgi, saame, et arvud x_1, y_1, x_2 ja y_2 jaguvad kõik 3-ga. See on vastuolus eeldusega, et need arvud on ühistegurita. Järelikult sellist kolmnurka ei leidu.

Lahendus 5. Eeldame väitevastaselt, et tasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvud. Olgu (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) selle kolmnurga tippude koordinaadid, a küljepikkus ja S pindala. Ühelt poolt

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

on täisarv. Teiselt poolt on arv $a^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ samuti täisarv, mistõttu

$$2S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

on irratsionaalarv. Jõudsime vastuoluni. Järelikult sellist kolmnurka ei leidu.

4. *Vastus:* b) Sobivad näiteks $a = 6$, $b = 10$, $c = 15$.

Lahendus 1. a) Olgu $d = \text{SÜT}(a, b)$ ning $a = a'd$ ja $b = b'd$, kusjuures $\text{SÜT}(a', b') = 1$. Siis $\text{VÜK}(a, b) = a'b'd$ ja $\dfrac{\text{VÜK}(a,b)}{\text{SÜT}(a,b)} = a'b'$. Tõestame, et $a'b' = c$.

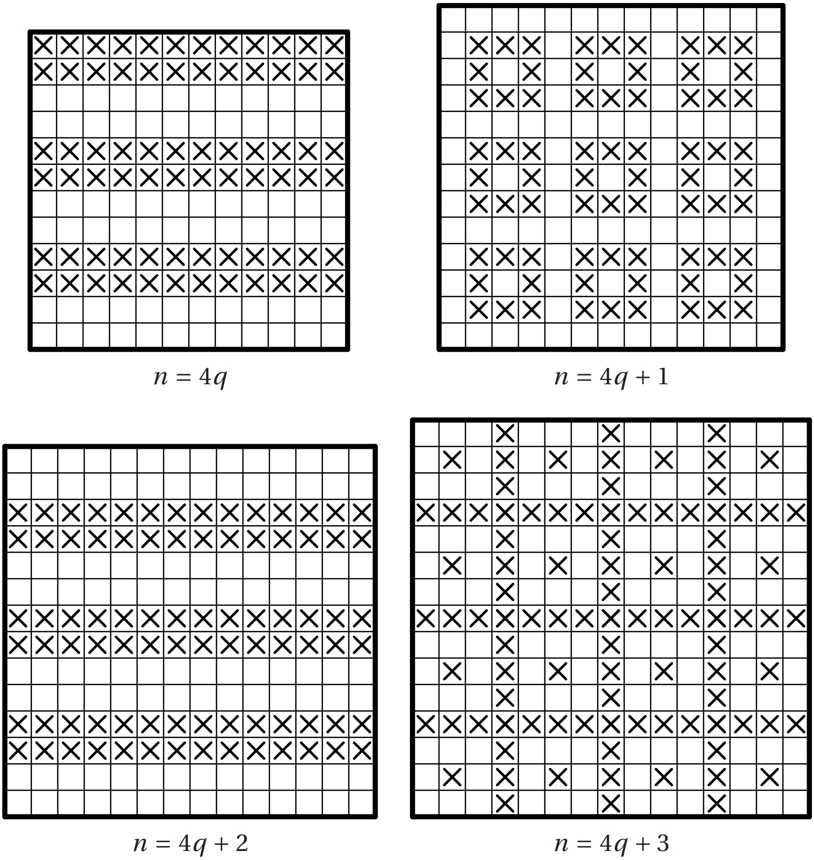
Ühelt poolt, et arv $ab = a'b'd^2$ jagub arvuga c ja tingimuse $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$ tõttu ka $\text{SÜT}(d, c) = 1$, siis $a'b'$ jagub arvuga c. Teiselt poolt, vastavalt ülesande tingimustele $ca = ca'd$ jagub arvuga $b = b'd$ ehk ca' jagub arvuga b'. Et $\text{SÜT}(a', b') = 1$, siis c jagub arvuga b'. Analoogiliselt näitame, et c jagub arvuga a'. Et a' ja b' on ühistegurita, siis jagub c arvuga $a'b'$. Kokkuvõttes seega tõesti $c = a'b'$ ehk ülesande väide kehtib arvu c puhul. Väited arvude a ja b kohta tõestame analoogiliselt.

b) Olgu x, y ja z erinevad paarikaupa ühistegurita arvud, näiteks erinevad algarvud. Võttes $a = xy$, $b = yz$ ja $c = xz$, rahuldavad arvud a, b ja c ülesande tingimusi. Tõepoolest,

$$\frac{\text{VÜK}(a,b)}{\text{SÜT}(a,b)} = \frac{xyz}{y} = xz = c$$

ning analoogiliselt ülejäänud juhtudel. Konkreetse näite saamiseks võime võtta $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$, mis annab arvud 6, 15 ja 10.

Lahendus 2. a) Vaatleme suvalist arvudes a, b ja c esinevat algtegurit p. Et $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$, peab see algtegur ühes arvus puuduma, olgu selleks arvuks näiteks c. Samal ajal, et ca jagub b-ga ja cb jagub a-ga, peab algtegur p esinema arvudes a ja b samas astmes α. Seega on antud kolmes arvus algteguri p astendajad mingis järjekorras α, α ja 0. Neist igaüks võrdub ülejäänud kahest suurima ja vähima vahega. Et selline omadus kehtib iga algteguri korral, siis on iga arv tõepoolest ülejäänud kahe vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatis.

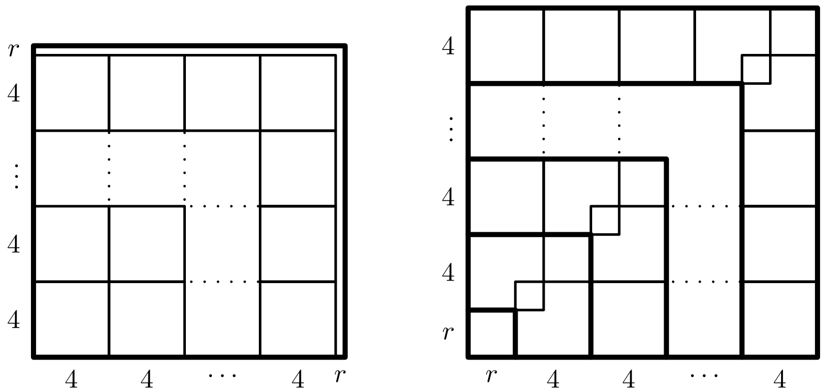


Joonis 9

5. *Vastus:* $8q^2$, kui $n = 4q$ või $n = 4q+1$; $8q^2+4q$, kui $n = 4q+2$; $8q^2+8q+1$, kui $n = 4q+3$ ja $q \geqslant 1$; 0, kui $n = 3$.

Lahendus. Olgu $A(n)$ ülesandes küsitud vähim märgitud ruutude arv. Kõikjal järgnevas olgu $n = 4q + r$, kus $0 \leqslant r < 4$. Uurime kõigepealt $A(n)$ ülemisi piire.

- Kui $r = 0$, siis märgime kõik ruudud kahe rea kaupa, nagu näidatud joonisel 9. Ilmselt saavad täpselt pooled ruudud ehk $8q^2$ tükki märgitud. Seega $A(4q) \leqslant 8q^2$.
- Kui $r = 1$, siis jätame märkimata kõik ruudud esimeses, viiendas, üheksandas jne reas ja veerus, ülejäänud ruudud moodustavad 3×3 rühmad, milles märgime kõik ruudud peale keskmise. Et rühmad moodustavad $q \times q$ tabeli ja igas rühmas on 8 märgitud ruutu, on kokku märgitud $8q^2$ ruutu. Järelikult siingi $A(4q + 1) \leqslant 8q^2$.



Joonis 10

- Kui $r = 2$, siis märgime kõik ruudud kahe rea kaupa, jättes nii alumisest kui ülemisest äärest kaks rida tühjaks. Kahest reast koosnevaid rühmi on q, igas reas on n ehk $4q + 2$ ruutu. Kokku on märgitud $2q(4q + 2)$ ehk $8q^2 + 4q$ ruutu. Seega $A(4q + 2) \leqslant 8q^2 + 4q$.
- Kui $r = 3$ ja $q > 0$, siis märgime kõik ruudud neljandas, kaheksandas, kaheteistkümnendas jne reas ja veerus, ülejäänud ruudud moodustavad 3×3 rühmad, millest igaühes märgime keskmise ruudu. Keskmisi ruute on $(q+1)^2$ tükki, märgitud ridu ja veerge kumbagi q tükki. Järelikult on märgitud ruutude arv $(q+1)^2 + 2(4q+3)q - q^2$ ehk $8q^2 + 8q + 1$. Seega $A(4q+3) \leqslant 8q^2 + 8q + 1$. Kui $r = 3$ ja $q = 0$ ehk $n = 3$, siis ilmselt $A(3) = 0$.

Näitame nüüd, et leitud piirid on ühtlasi alumisteks piirideks.

- Olgu $r = 0$ või $r = 1$. Siis saab $n \times n$ ruudustikus valida ruudu mõõtmetega $4q \times 4q$ ja jaotada see q^2 ruuduks mõõtmetega 4×4 (joonis 10, vasakul). Vastavalt ülesande tingimustele peab igas neist ruutudest olema vähemalt 8 ühikruutu märgitud. Seega kokku peab olema märgitud vähemalt $8q^2$ ühikruutu, ehk $A(n) \geqslant 8q^2$.
- Olgu $r = 2$ või $r = 3$. Eraldame vasakust alumisest nurgast $r \times r$ ruudu ning jaotame ülejäänud ala q ribaks laiusega 4 ühikut, nagu näidatud joonisel 10 paremal. Ribasid on q, nummerdame need arvudega 1 kuni q. Igas ribas eraldame kummastki otsast järjestikused 4×4 ruudud, i-ndas ribas saame neid kokku $2i$. Viimased 4×4 ruudud lõikuvad, lõikumisel tekib $(4 - r) \times (4 - r)$ ruut. Peale selle jääb iga riba nurka üle üks $r \times r$ ruut. Märgitud ruutude arvu hindamiseks liidame kõikides 4×4 ruutudes märgitud ruutude vähima võimaliku arvu, lahutame lõikuvate ruutude ühisosades märgitud ruutude suurima võimaliku arvu

ja liidame ülejäävates $r \times r$ ruutudes märgitud ruutude vähima võimaliku arvu.
Juhul $r = 2$ on märgitud ruutude koguarv seega vähemalt

$$8 \cdot (2 + 4 + \ldots + 2q) - 4 \cdot q + 0 \cdot q = 8 \cdot \frac{(2q + 2)q}{2} - 4q = 8q^2 + 4q.$$

Juhul $r = 3$ arvestame, et igasse 3×3 ruutu (sealhulgas ruutu all vasakul) kuulub vähemalt üks märgitud ruut, mistõttu märgitud ruutude koguarv on vähemalt

$$8 \cdot (2 + 4 + \ldots + 2q) - 1 \cdot q + 1 \cdot (q + 1) = 8 \cdot \frac{(2q + 2)q}{2} + 1 = 8q^2 + 8q + 1.$$

Seega $A(4q + 2) \geqslant 8q^2 + 4q$ ning $A(4q + 3) \geqslant 8q^2 + 8q + 1$.
Märkus. Eeltoodud näidetest nähtub, et iga n korral saab ruudud ristidega märkida nii, et igas 4×4 ruudus on märgitud *täpselt* pooled ruudud.