Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **9. klass**

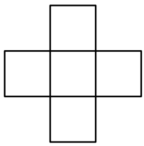
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia suurim selline naturaalarv, mille iga number peale esimese on eelmisest ühe võrra väiksem ning mis jagub iga oma numbriga.

2. Kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud mediaanid on omavahel risti. Tõesta, et kolmnurga külg AB on lühem kolmnurga kummastki ülejäänud küljest.

3. Kooli direktor soovib palgata lisaks olemasolevatele õpetajatele teatud arvu uusi õpetajaid. Kui ta palkaks lisaks 10 õpetajat, väheneks kooli õpilaste arv ühe õpetaja kohta 5 võrra. Kui aga direktor palkaks 20 uut õpetajat, väheneks õpilaste arv ühe õpetaja kohta 8 võrra. Kui palju õpilasi ja kui palju õpetajaid on selles koolis?

4. Joonisel on näidatud 5 ühikruudust koosnev kujund, *kreeka rist*. Milline on suurim arv kreeka riste, mida saab täielikult ja ilma omavaheliste kattumisteta paigutada ruudustikule mõõtmetega 8×8, kusjuures risti iga ühikruut katab ruudustikus parajasti ühe ruudu?



5. Juhan tahab vihtideta kangkaalu abil raskuse järjekorda seada viis erineva kaaluga kuuli. Enne kaalumise alustamist nummerdab ta kuulid arvudega 1 kuni 5 ja koostab kaalumiste nimekirja, mis koosneb kuulide järjekorranumbrite paaridest (st nimekiri on selliste paaride loetelu). Seejärel võrdleb ta ükshaaval iga nimekirjas oleva numbripaari jaoks vastava kahe kuuli raskust. Kas Juhan saab koostada kaalumiste nimekirja, kus on vähem kui 10 paari, nii et selle abil saaks kuulide raskuse järjekorra igal juhul täielikult määrata?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Seitsmekohalise naturaalarvu numbrid on paarikaupa erinevad ja see arv jagub iga oma numbriga.

a) Leia kõik võimalused, millised saavad olla need kolm numbrit, mis selles arvus ei sisaldu.

b) Too näide sellisest arvust.

2. Ringjoonele c keskpunktiga O on tõmmatud ristuvad raadiused OA ja OB. Nende raadiustega piiratud sektori sisse joonestatakse ringjoon, mis puutub raadiusi vastavalt punktides C ja D ning ringjoont c punktis Q. Leia nurga AQC suurus.

3. Tõesta, et kolme erineva positiivse paaritu täisarvu ruutude summa saab esitada kuue (mitte tingimata erineva) positiivse täisarvu ruutude summana.

4. Kaks kolmnurka paigutatakse tasandile nii, et nendega kokku kaetud ala moodustab hulknurga (mitte tingimata kumera). Leia kõik võimalused, milline saab olla selle hulknurga tippude arv.

5. Raamatu identifikaator koosneb n-liikmelisest jadast, kus liikmetena võivad esineda ainult numbrid $0, 1, \ldots, 9$, ning lõpus asuvast naturaalarvust – *kontrollkoodist*. Viimane leitakse jada põhjal kindla reegli järgi, kusjuures alati, kui jadas muuta ühte suvalist numbrit suuremaks (jättes ülejäänud samaks), muutub ka vastav kood suuremaks. Milline on vähim võimalik erinevate kontrollkoodide arv, kui kõik n-liikmelised numbrijadad on identifikaatorites kasutusel?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvud a, mille korral ruutvõrrandi $x^2 - ax + a = 0$ lahendid on täisarvud.

2. On antud ruumiline malelaud mõõtmetega $4 \times 4 \times 4$. Ruumiline vanker saab ühe sammuga liikuda ühikkuubist K suvalisse teise ühikkuupi, millel on kuubiga K ühine tahk. Ruumiline oda saab ühe sammuga liikuda ühikkuubist K suvalisse teise ühikkuupi, millel on kuubiga K ühine serv, kuid pole ühist tahku. Nii vankri kui oda üks *käik* koosneb mingist positiivsest arvust järjestikustest sammudest ühes suunas. Leia kummagi malendi keskmine võimalike käikude arv, kui malendi lähtekohaks võib olla suvaline malelaua ühikkuup.

3. Võrdhaarse kolmnurga ABC haara AB otspunkte läbiv ringjoon lõikab kolmnurga alust BC punktis P. Sellele ringjoonele punktist B tõmmatud puutuja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis Q. Tõesta, et punkt P asub sirgel AQ parajasti siis, kui sirge AQ on risti kolmnurga alusega BC.

4. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral

$$m^n - n^m = 3.$$

5. Tasandile on paigutatud teatud arv ringe raadiusega 2. Tõesta, et nende ringidega kaetud ala kogupindala on arvuliselt vähemalt niisama suur kui seda ala piiravate kaarte kogupikkus.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

31. märts 2007 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Antud on ühise põhjaga püstsilinder ja püstkoonus. Silindri see osa, mis jääb koonuse sisse, on ruumalalt võrdne silindri osaga väljaspool koonust. Leia koonuse kõrguse suhe silindri kõrgusesse.

2. Positiivsed reaalarvud x, y ja z on sellised, et arvud x^n, y^n ja z^n on iga naturaalarvu n korral mingi kolmnurga küljepikkused. Tõesta, et vähemalt kaks arvudest x, y ja z on võrdsed.

3. Kas leidub selline võrdkülgne kolmnurk

a) tasandil;

b) ruumis,

mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega?

4. Olgu a, b ja c niisugused positiivsed täisarvud, et $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$ ning iga kahe arvu korrutis jagub kolmanda arvuga.

a) Tõesta, et igaüks neist arvudest on võrdne kahe ülejäänud arvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatisega.

b) Too näide sellistest ühest suurematest arvudest a, b ja c.

5. Ruudustikus mõõtmetega $n \times n$ märgitakse osa ruute ristidega nii, et igas 4×4 ruudus märgitakse vähemalt pooled ruudud. Leia vähim võimalik märgitud ruutude koguarv ruudustikus.