LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все пары положительных целых чисел (a, b), при которых

$$ab = \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b).$$

2. Доказать, что круг радиусом 2 можно полностью накрыть 7 единичными кругами.

3. Даны $n \geqslant 2$ действительных чисел. Известно, что ни одно из этих чисел не больше, чем среднее арифметическое остальных чисел. Доказать, что все данные числа равны.

4. Величина угла при вершине C равнобедренного треугольника ABC составляет 120°. На основании треугольника AB берут точки D и E так, что $|AD| = |DE| = |EB|$. Найти величины углов треугольника CDE.

5. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Назовём кораблём комплект единичных клеток, который можно составить начиная с какой-то клетки так, что каждым шагом добавляют одну клетку, имеющую общую сторону с какой-то уже выбранной в комплект клеткой. Назовём эскадрой такое множество кораблей, в котором никакие два корабля не содержат клеток с общей вершиной. Найти наименьшее возможное количество клеток в эскадре, которую невозможно дополнить ни одним новым кораблём.

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. | Заключительный тур | **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1+2^{-2006}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{1}{1+2^{0}}+\frac{1}{1+2^{1}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{2006}}.$$

2. Пусть a, b и c — такие положительные целые числа, что $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются все квадратами целых чисел.

а) Привести пример таких чисел a, b и c.

б) Доказать, что по крайней мере одно из чисел a, b и c делится на 4.

3. Биссектриса, проведенная из вершины B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке G, а биссектриса, проведенная из вершины C, пересекает сторону AB в точке H. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ABG и ACH находится на стороне BC. Доказать, что величина угла BAC равна 60°.

4. Найти в действительных числах все решения уравнения

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]=x.$$

(Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z, т.е. наибольшее целое число, которое не превосходит число z.)

5. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Назовём кораблём комплект единичных клеток, который можно составить начиная с какой-то клетки так, что каждым шагом добавляют одну клетку, имеющую общую сторону с какой-то уже выбранной в комплект клеткой. Назовём эскадрой такое множество кораблей, в котором никакие два корабля не содержат клеток с общей вершиной. Найти наибольшее натуральное число, при любом представлении которого в виде суммы положительных целых чисел найдётся эскадра, количества клеток кораблей которой являются в точности слагаемыми суммы.

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наибольшее значение выражения $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ и все числа x, при которых это наибольшее значение реализуется.

2. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника — простое число, а длины остальных сторон — какие-то целые числа. Отношение периметра треугольника к диаметру вписанной окружности также является целым числом. Найти все возможности, чему могут быть равны длины сторон этого треугольника.

3. Последовательность (F_n) чисел Фибоначчи удовлетворяет условиям $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для каждого $n \geqslant 3$. Найти все пары целых чисел (m, n), при которых $F_m \cdot F_n = mn$.

4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, а M — точка пересечения медиан, при этом прямая OM перпендикулярна прямой AM. Пусть A' — вторая точка пересечения прямой AM с описанной окружностью треугольника ABC. Прямые BA' и AC пересекаются в точке D, а прямые CA' и AB пересекаются в точке E. Доказать, что центр описанной окружности треугольника ADE расположен на описанной окружности треугольника ABC.

5. Дано клетчатое игровое поле размерами $n \times n$. На какую-то клетку игрового поля ставят фишку, которой можно совершать ходы двух типов: фишку можно передвинуть на такую произвольную соседнюю клетку, которая имеет общую сторону с текущей клеткой, или же на такую соседнюю клетку, которая имеет с текущей клеткой общую вершину, но не общую сторону. Два последовательных хода должны всегда быть различных типов. Найти все натуральные числа $n \geqslant 2$, при которых возможно выбрать исходную клетку и последующие ходы так, чтобы фишка побывала на каждой клетке игрового поля ровно один раз (заканчивая на клетке, отличной от исходной).

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Назовём кораблём комплект единичных клеток, который можно составить начиная с какой-то клетки так, что каждым шагом добавляют одну клетку, имеющую общую сторону с какой-то уже выбранной в комплект клеткой. Доказать, что если количество всех возможных состоящих из n клеток кораблей — нечётное число, то n делится на 4.

2. Найти наименьшее возможное расстояние между точками плоскости P и Q, если P расположена на графике функции $y = x$, а Q — на графике функции $y = 2^x$.

3. Доказать или опровергнуть следующие утверждения.

а) Для каждого целого $n \geqslant 3$ найдутся n попарно различных положительных целых чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму остальных $n - 2$ чисел.

б) Для какого-то целого $n \geqslant 3$ найдутся n попарно различных положительных целых чисел, сумма любых $n - 2$ из которых делится на произведение остальных двух чисел.

4. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а A', B' и C' — центры описанных окружностей соответственно треугольников BCO, CAO и ABO. Доказать, что площадь треугольника $A'B'C'$ не меньше площади треугольника ABC.

5. Алфавит употребляемого в Африке языка абаби состоит из букв A и B, а словами этого языка являются все слова, которые можно составить при помощи следующих двух правил.

1) A — слово.
2) Если s — слово, то $s \oplus s$ и $s \oplus \bar{s}$ — слова, где $\bar{s}$ обозначает слово, которое получают из слова s, заменяя в нём все буквы A буквами B и наоборот, а $x \oplus y$ обозначает написание подряд слов x и y.

Алфавит употребляемого в Австралии языка улулу состоит из букв A и B, а в этом языке словами являются все слова, которые можно составить при помощи следующих двух правил.

1) A — слово.
2) Если s — слово, то $s \otimes s$ и $s \otimes \bar{s}$ — слова, где $\bar{s}$ обозначает то же, что и раньше, а $x \otimes y$ в случае слов x и y одинаковой длины обозначает слово, которое получим, если будем одну за другой писать буквы поочерёдно слов x и y, начиная с первой буквы слова x.

Доказать, что языки абаби и улулу состоят из одних и тех же слов.