Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **Lahendused ja vastused**

9. klass

1. *Vastus:* $(2,2)$.

Lahendus 1. Et antud võrduses jaguvad vasak pool ja parema poole liidetav VÜK(a,b) arvuga a, siis peab ka SÜT(a,b) jaguma a-ga. Samas positiivsete täisarvude korral SÜT$(a,b) \leqslant a$, järelikult SÜT$(a,b) = a$. Analoogiliselt SÜT$(a,b) = b$ ehk $a = b$. Ülesande võrdus omandab seega kuju $a^2 = a + a$ ehk $a(a-2) = 0$. Selle võrrandi ainuke positiivne lahend on $a = 2$, siis ka $b = 2$.

Lahendus 2. On teada, et $ab = \text{SÜT}(a,b)\,\text{VÜK}(a,b)$. Seega on meil tegemist võrdusega

$$\text{SÜT}(a,b)\,\text{VÜK}(a,b) = \text{SÜT}(a,b) + \text{VÜK}(a,b).$$

Toome liikmed ühele poole ning liidame kummalegi poolele arvu 1, saame

$$\text{SÜT}(a,b)\,\text{VÜK}(a,b) - \text{SÜT}(a,b) - \text{VÜK}(a,b) + 1 = 1$$

ehk

$$\big(\text{SÜT}(a,b) - 1\big)\big(\text{VÜK}(a,b) - 1\big) = 1.$$

Viimane võrdus esitab arvu 1 kahe mittenegatiivse täisarvu korrutisena; see on võimalik ainult juhul, kui mõlemad tegurid on võrdsed 1-ga. Seega SÜT$(a,b) - 1 = 1$ ja VÜK$(a,b) - 1 = 1$ ehk SÜT$(a,b) = 2$ ja VÜK$(a,b) = 2$. Siit $a = b = 2$.

Lahendus 3. Olgu SÜT$(a,b) = d$. Esitame arvud a ja b kujul $a = da'$, $b = db'$, kus a' ja b' on ühistegurita. Siis ilmselt VÜK$(a,b) = da'b'$. Ülesande võrdus omandab kuju

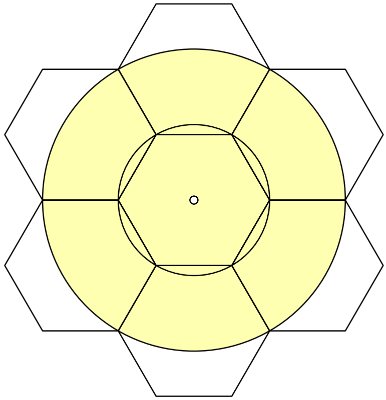
$$d^2a'b' = d + da'b',$$

millest

$$a'b' = \frac{1}{d-1}.$$

Et $a'b'$ on täisarv, siis ainukese võimalusena $d-1 = 1$ ja $a'b' = 1$. Siit $d = 2$ ja $a' = b' = 1$. Otsitavad arvud on seega $a = da' = 2$ ja $b = db' = 2$.

2. Vaatleme korrapärastest kuusnurkadest koostatud kujundit joonisel 1, kus iga kuusnurga küljepikkus on 1. Iga sellise kuusnurga saab parajasti katta ühikringiga, samas katab 7 kuusnurgast koostatud kujund ringi raadiusega 2, sest nii suur on vähim kaugus kujundi keskpunktist kujundi ääreni.



Joonis 1

3. *Lahendus 1.* Olgu a suurim arv vaadeldavate arvude hulgas. Oletame väitevastaselt, et kõik antud arvud ei ole võrdsed. Siis leidub nende hulgas arvust a väiksemaid arve. Kui arv a kõrvale jätta, siis ülejäänud arvude aritmeetiline keskmine on väiksem kui arv a. See on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult peavad kõik arvud olema võrdsed.

Lahendus 2. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vaadeldavad arvud ning s nende summa. Vastavalt ülesande tingimustele kehtivad võrratused

$$a_1 \leqslant \frac{s-a_1}{n-1}, \qquad a_2 \leqslant \frac{s-a_2}{n-1}, \qquad \ldots, \qquad a_n \leqslant \frac{s-a_n}{n-1}.$$

Kui vähemalt üks võrratustest oleks range, siis saaksime võrratusi liites

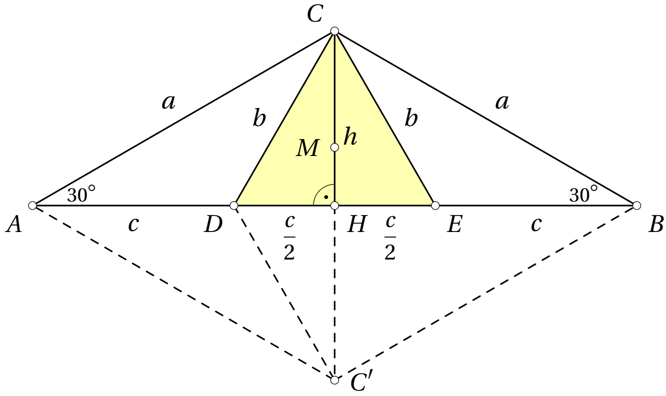
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \frac{s-a_1}{n-1} + \frac{s-a_2}{n-1} + \ldots + \frac{s-a_n}{n-1}.$$

Seose $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$ tõttu on viimane võrratus samaväärne võrratusega $s < \frac{ns-s}{n-1}$ ehk $s < s$, vastuolu. Järelikult peab kõigis esialgsetes võrratustes kehtima võrdus, teiste sõnadega

$$a_1 = \frac{s-a_1}{n-1}, \qquad a_2 = \frac{s-a_2}{n-1}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{s-a_n}{n-1}.$$

Esimesest võrdusest saame nüüd $a_1(n-1) = s - a_1$ ehk $a_1 = \frac{s}{n}$, teisest võrdusest analoogiliselt $a_2 = \frac{s}{n}$ jne kuni viimasest võrdusest $a_n = \frac{s}{n}$. Seega on kõik arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ võrdsed.

4. *Vastus:* kõik nurgad on 60°.



Joonis 2

Lahendus 1. Kolmnurga ABC alusnurk on $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Olgu H kolmnurga tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt (joonis 2). Peegeldame kolmnurka ABC külje AB suhtes, millega punkt C teiseneb punktiks C'. Et $\angle CAC' = 60^\circ$ ja $|AC| = |AC'|$, siis on kolmnurk ACC' võrdkülgne ning lõik AH on tema mediaan. Seejuures jaotab punkt D selle lõigu suhtes $2 : 1$, järelikult on D kolmnurga ACC' mediaanide lõikepunkt. Siis on sirge CD samuti mediaan ja ühtlasi nurgapoolitaja, seega $\angle DCH = 30^\circ$ ning $\angle DCE = 60^\circ$. Et kolmnurk CDE on võrdhaarne, siis ka $\angle CDE = \angle CED = 60^\circ$.

Lahendus 2. Tähistame lühiduse mõttes $|CA| = |CB| = a$, $|CD| = |CE| = b$ ja $|AD| = |DE| = |EB| = c$. Lisaks olgu h tipust C küljele AB tõmmatud kõrguse pikkus. Kolmnurgast CHA saame $h : \frac{3c}{2} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, mistõttu $h = \frac{\sqrt{3}\,c}{2}$. Kolmnurgast CHD saame nüüd Pythagorase teoreemi abil $b^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{3c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = c^2$. Järelikult $b = c$. Seega on kolmnurk CDE võrdkülgne ning tema nurgad on 60°.

Lahendus 3. Et täisnurkses kolmnurgas CHA on $\frac{|CH|}{|CA|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ning samuti $\frac{|DH|}{|DA|} = \frac{1}{2}$, siis rahuldab lõik CD nurgapoolitaja omadust. Järelikult poolitab lõik CD nurga ACH, mille suurus on 60°, ehk $\angle DCH = 30^\circ$. Siis aga on võrdhaarse kolmnurga CDE tipunurga suurus 60°, alusnurkade suurused on seega samuti 60°.

Lahendus 4. Olgu M kolmnurga CDE mediaanide lõikepunkt. Siis kiirteteoreemi põhjal $|DM| = \frac{1}{3}|AC| = \frac{1}{3}|BC| = |EM|$. Täisnurksest kolmnurgast

CHA saame $|CH| = \frac{1}{2}|AC|$ ehk $|CM| = \frac{1}{3}|AC|$. Et $|CM| = |DM| = |EM|$, siis on kolmnurga CDE mediaanide lõikepunkt M ühtlasi ümberringjoone keskpunkt. Järelikult on kolmnurk CDE võrdkülgne ja kõik tema nurgad on suurusega 60°.

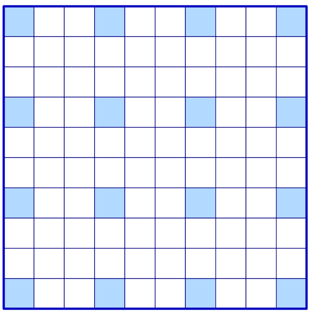
Lahendus 5. Oletame, et $\angle DCE > 60^\circ$. Siis $\angle CED < 60^\circ$. Et suuremale nurgale vastab suurem külg, siis $|DE| > |CD|$ ehk $|AD| > |CD|$. Kolmnurgas ACD on siis $\angle ACD > 30^\circ$ ning sümmeetriliselt kolmnurgas BCE on $\angle BCE > 30^\circ$. Seega $\angle ACB > 120^\circ$, vastuolu. Analoogiliselt viib vastuolule oletus $\angle DCE < 60^\circ$. Seega peab olema $\angle DCE = 60^\circ$, millest järeldub, et $\angle CDE = \angle CED = 60^\circ$.

Lahendus 6. Esiteks paneme tähele, et kui tipu C juures on nurgad 30°, 60°, 30°, siis vastavad lõigud alusel on võrdsed. Tõepoolest, siis on kolmnurgad ADC ja BEC võrhaarsed, mistõttu $|AD| = |CD|$ ja $|BE| = |CE|$; kolmnurk CDE on aga võrdkülgne, mistõttu $|CD| = |CE| = |DE|$. Teiseks, osalõikude pikkuste vahekord kolmnurga alusel määrab üheselt nurkade jaotuse tipunurga juures.

5. *Vastus:* 16.

Näitame kõigepealt, et 16 ruutu kattev nõutud omadusega laevastik leidub. Paigutame ruudustikule 16 üheruudulist laeva nii, nagu joonisel 3. Siis on ruudustiku igal ruudul ühine tipp ühega nendest laevadest, seega pole võimalik laevu juurde lisada.

Tõestame nüüd, et nõutud omadusega laevastik ei saa koosneda vähem kui 16 ruudust. Vaatleme ruudustiku ruute, kuhu eelmises osas paigutasime laevad. Nende hulgas ei leidu kahte ruutu, millel oleks ruudustiku sama ruuduga ühine tipp. Kui laevastikku pole võimalik ühtegi laeva lisada, siis peab laevastikus leiduma neist 16 ruudust igaühe jaoks mingi temaga ühise tipuga ruut. Et need ruudud peavad kõik olema erinevad, siis peab laevastikus olema vähemalt 16 ruutu.



Joonis 3

10. klass

1. *Vastus:* $2006\,\frac{1}{2}$.

Suvalise reaalarvu $a \neq 0$ ja suvalise täisarvu k korral

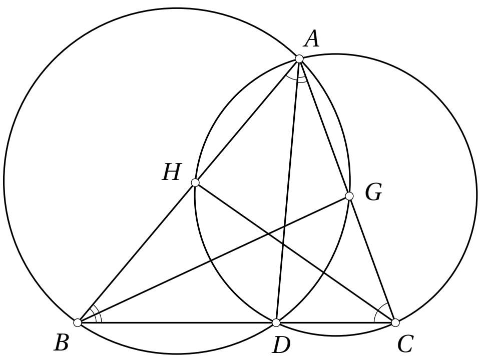
$$\frac{1}{1+a^{-k}}+\frac{1}{1+a^{k}}=\frac{1+a^{k}+1+a^{-k}}{\left(1+a^{-k}\right)\left(1+a^{k}\right)}=1.$$

Ülesandes antud summa algusest i-s liidetav ja lõpust i-s liidetav moodustavad parajasti sellise paari; üldse on summas 2006 niisugust paari ning lisaks veel liidetav $\frac{1}{1+2^{0}}=\frac{1}{2}$. Summa on seega $2006\cdot 1+\frac{1}{2}=2006\,\frac{1}{2}$.

2. a) Sobivad näiteks arvud $a=1$, $b=3$, $c=8$. Siis $ab+1=2^2$, $bc+1=5^2$, $ca+1=3^2$.

b) Kui kõik arvud a, b ja c on paaritud, siis annavad nad 4-ga jagamisel kas jäägi 1 või jäägi 3. Järelikult leidub nende seas kaks arvu, mille jäägid on võrdsed, üldisust kitsendamata olgu need a ja b. Sõltumata sellest, kas a ja b annavad 4-ga jagades jäägi 1 või jäägi 3, annab $ab+1$ jagamisel 4-ga jäägi 2. Seega ei saa $ab+1$ olla täisruut, sest täisruutude jäägid 4-ga jagamisel saavad olla ainult kas 0 (arvud kujul $2k$) või 1 (arvud kujul $2k+1$). Seega võime eeldada, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on paaris, üldisust kitsendamata olgu see a. Siis on arv $ab+1$ paaritu täisruut. Et nii kujuga $4k+1$ kui ka $4k+3$ paaritute arvude ruudud annavad 8-ga jagades jäägi 1, siis ab jagub 8-ga. Järelikult peab vähemalt üks arvudest a ja b jaguma 4-ga.

3. Olgu D kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte lõikepunkt, mis asub küljel BC (joonis 4). Lühiduse mõttes tähistame $\angle BAD=\alpha$ ja $\angle CAD=\beta$.



Joonis 4

Et nurgad HAD ja HCD toetuvad samale kaarele, siis $\angle HCA = \angle HCD = \angle HAD = \alpha$. Samal põhjusel $\angle GBA = GBD = \angle GAD = \beta$. Kolmnurga ABC sisenurkade summa järgi saame võrrandi $(\alpha+\beta)+2\alpha+2\beta = 180^\circ$ ehk $3(\alpha+\beta) = 180^\circ$. Siit $\angle BAC = \alpha+\beta = 60^\circ$.

4. *Vastus:* 0, 2, 3, 4, 5 ja 7.

Lahendus 1. Et vasaku poole liidetavad on täisarvud, siis peab x olema täisarv. Järelikult avaldub ta kujul $x = 6k + l$, kus k ja l on täisarvud ja $0 \leqslant l \leqslant 5$.

- Kui $x = 6k$, siis on võrrandil kuju $3k + 4k = 6k$, millest $k = 0$ ja $x = 0$.
- Kui $x = 6k + 1$, siis on võrrandil kuju $3k + 4k = 6k + 1$, millest $k = 1$ ja $x = 7$.
- Kui $x = 6k + 2$, siis on võrrandil kuju $3k + 1 + 4k + 1 = 6k + 2$, millest $k = 0$ ja $x = 2$.
- Kui $x = 6k + 3$, siis on võrrandil kuju $3k + 1 + 4k + 2 = 6k + 3$, millest $k = 0$ ja $x = 3$.
- Kui $x = 6k + 4$, siis on võrrandil kuju $3k + 2 + 4k + 2 = 6k + 4$, millest $k = 0$ ja $x = 4$.
- Kui $x = 6k + 5$, siis on võrrandil kuju $3k + 2 + 4k + 3 = 6k + 5$, millest $k = 0$ ja $x = 5$.

Lahendus 2. Et $\left[\frac{x}{2}\right] \leqslant \frac{x}{2}$ ja $\left[\frac{2x}{3}\right] \leqslant \frac{2x}{3}$, siis saame antud võrrandist

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} \geqslant x$$

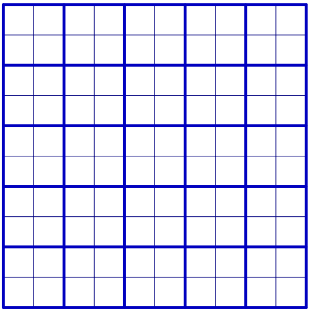
ehk $3x + 4x \geqslant 6x$, millest $x \geqslant 0$. Teiselt poolt, et x on täisarv, siis alati $\left[\frac{x}{2}\right] \geqslant \frac{x-1}{2}$ ja $\left[\frac{2x}{3}\right] \geqslant \frac{2x-2}{3}$, seega saame

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x-2}{3} \leqslant x$$

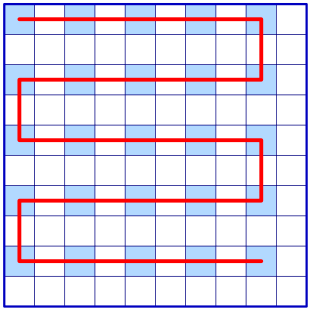
ehk $3x - 3 + 4x - 4 \leqslant 6x$, millest $x \leqslant 7$. Jääb kontrollida x väärtusi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Võrrandit rahuldavad nendest kõik peale $x = 1$ ja $x = 6$.

5. *Vastus:* 25.

Tõestame kõigepealt, et 25-st suurema arvu saab jaotada liidetavateks nii, et vastavate laevasuurustega laevastikku pole võimalik ruudustikule paigutada. Täpsemalt, tõestame, et ruudustikule pole võimalik paigutada rohkem kui 25 laeva suurusega 1. Tükeldame mängulaua 2×2 ruutudeks (joonis 5), neid on 25. Et iga tükk võib sisaldada ülimalt ühe laeva suurusega 1, saab ruudustikule üldse paigutada ülimalt 25 laeva suurusega 1.



Joonis 5



Joonis 6

Näitame nüüd, et arvu 25 iga liidetavateks jaotuse korral leidub selliste laevasuurustega laevastik. Paneme ruudustikule esialgu 25 laeva suurusega 1 nagu joonisel 6. Seejärel nihutame alates vasakust ülemisest ruudust mööda punast joont omavahel kokku nii mitu esimest laeva, kui suur on vaadeldava liidetavateks jaotuse esimene liidetav, siis nii mitu laeva, kui suur on teine liidetav jne. Saadud komplekt rahuldab ülesande tingimusi.

11. klass

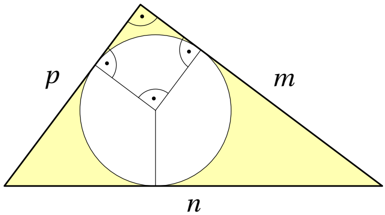
1. *Vastus:* suurim väärtus on $\sin 1 + 1$, see saavutatakse parajasti siis, kui $x = 2k\pi$, kus k on suvaline täisarv.

Et funktsiooni $\cos x$ väärtus kuulub alati lõiku $[-1; 1]$ ning funktsioon $\sin x$ on sellel lõigul kasvav, siis esimese liidetava suurim väärtus on $\sin 1$ ning see saavutatakse parajasti siis, kui $\cos x = 1$ ehk $x = 2k\pi$, kus k on suvaline täisarv. Teise liidetava suurim väärtus on 1, mis saavutatakse parajasti siis, kui $\sin x = 0$ ehk $x = l\pi$, kus l on suvaline täisarv. Mõlemad liikmed omandavad korraga maksimaalse väärtuse parajasti $x = 2k\pi$ korral, kus k on suvaline täisarv; avaldise väärtus on sel juhul $\sin 1 + 1$.

2. *Vastus:* 3, 4 ja 5.

Olgu p ja m kolmnurga kaatetite pikkused ja n hüpotenuusi pikkus, kusjuures p on algarv (joonis 7). Pythagorase teoreemist $p^2 + m^2 = n^2$ saame $p^2 = n^2 - m^2$ ehk $p^2 = (n - m)(n + m)$. Et p on algarv, siis parema poole tegurid on ainsa võimalusena $n - m = 1$, $n + m = p^2$.

Kolmnurga ümbermõõt on $p + m + n$. Kolmnurga siseringjoone diameetri d leidmiseks arvestame, et täisnurga tipust lähtuvate siseringjoone puutujalõikude kogupikkus võrdub siseringjoone diameetriga, ülejäänud kahest tipust tõmmatud nelja puutujalõigu kogupikkus on aga $2n$. Järelikult



Joonis 7

$d+2n = p+m+n$, millest $d = p+m-n$. Ülesande tingimuse põhjal jagub arv $p+m+n$ arvuga $p+m-n$. Asendades siin $m+n$ ja $m-n$ eelneva põhjal, saame, et arv $p+p^2 = p(p+1)$ jagub arvuga $p-1$. Et p ja $p-1$ on ühistegurita, siis $p+1$ jagub arvuga $p-1$. Sellest järeldub, et nende arvude vahe 2 jagub arvuga $p-1$. Seega $p-1=1$ või $p-1=2$. Esimene juht, kus $p=2$, on võimatu, sest siis peaksid arvud $n-m$ ja $n+m$ olema erineva paarsusega. Järelikult $p=3$. Seostest $n-m=1$, $n+m=9$ leiame nüüd $m=4$ ja $n=5$. Kolmnurk küljepikkustega 3, 4, 5 on ilmselt täisnurkne.

3. *Vastus:* $(1,1)$, $(1,5)$, $(4,6)$, $(5,1)$, $(5,5)$ ja $(6,4)$.

Lahendus 1. Arvutame välja jada mõned esimesed liikmed:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

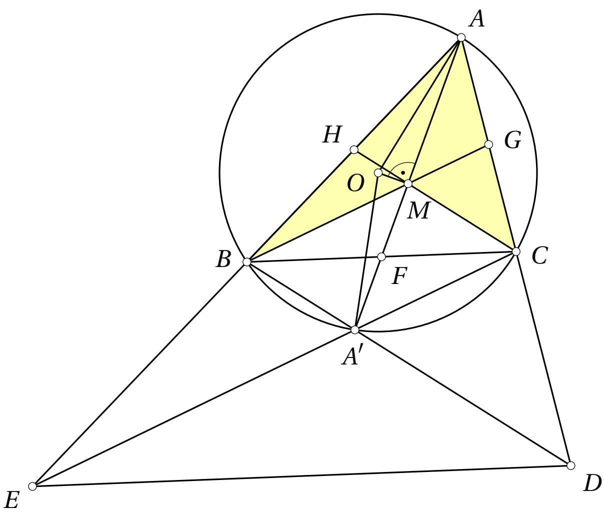
Näitame kõigepealt, et iga $n \geqslant 8$ korral $F_n > 2n$. Tõepoolest, tabelist näeme, et see võrratus kehtib, kui $n=8$ ja $n=9$. Kui mingi $k \geqslant 8$ korral $F_k > 2k$ ja $F_{k+1} > 2(k+1)$, siis $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k > 2k + 2(k+1) > 2(k+2)$. Edasi, võttes arvesse ka väärtusi $1 \leqslant n \leqslant 7$, näeme, et iga n korral $F_n \geqslant \frac{n}{2}$. Siit järeldub, et otsitava paari kumbki liige ei tohi olla suurem kui 7, sest näiteks juhul $m \geqslant 8$ saaksime $F_m \cdot F_n > 2m \cdot \frac{n}{2} > mn$.

Paari kumbki liige ei saa olla 2, 3 ega 7, sest näiteks $m = 2, 3, 7$ korral on $\frac{F_m}{m}$ vastavalt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{13}{7}$, kuid ei leidu indeksit $n \leqslant 7$, mille korral $\frac{F_n}{n}$ oleks vastavalt 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{13}$. Juhtudel $m=1$ ja $m=5$ on $\frac{F_m}{m} = 1$, siit saame neli sobivat paari $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$ ja $(5,5)$. Juhul $m=4$ on $\frac{F_m}{m} = \frac{3}{4}$, millele vastab $n=6$, kus $\frac{F_n}{n} = \frac{4}{3}$. Siit saame veel kaks paari $(4,6)$ ja $(6,4)$.

Lahendus 2. Induktsiooniga n järgi tõestame, et iga $n \geqslant 6$ korral kehtib $F_n > n$ ja iga $n \geqslant 8$ korral kehtib $F_n > 2n$. Järelikult kui $m \geqslant 6$ ja $n \geqslant 6$, siis $F_m \cdot F_n > m \cdot n$. See tähendab, et igas otsitavas paaris on üks komponent ülimalt 5. Võrduse sümmeetria tõttu võime eeldada, et see komponent on m, ülejäänud sobivad paarid saame m ja n vahetamisel.

- Kui $m = 1$, siis saame ülesande võrdusest $1 \cdot F_n = 1 \cdot n$ ehk $F_n = n$. Eelneva põhjal sobivad ainukestena $n = 1$ ja $n = 5$. Sobivad paarid on seega $(1, 1)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$ ja $(5, 5)$.
- Kui $m = 2$, siis saame $1 \cdot F_n = 2 \cdot n$ ehk $F_n = 2n$. Et $n < 8$ korral sellise omadusega arvu ei ole, siis sel juhul lahendeid ei leidu.
- Kui $m = 3$, siis saame $2 \cdot F_n = 3 \cdot n$ ehk $F_n = \frac{3}{2}n$. Et $\frac{3}{2}n < 2n$, siis analoogiliselt eelmise juhuga lahendid puuduvad.
- Kui $m = 4$, siis saame $3 \cdot F_n = 4 \cdot n$ ehk $F_n = \frac{4}{3}n$. Ainuke sobiv võimalus on $n = 6$, mis annab paarid $(4, 6)$ ja $(6, 4)$.
- Kui $m = 5$, siis saame $5 \cdot F_n = 5 \cdot n$ ehk $F_n = n$, see on juba analüüsitud esimeses punktis.

4. Olgu F, G ja H vastavalt kolmnurga tipust A, B ja C tõmmatud mediaanide aluspunktid (joonis 8). Kolmnurk $A'OA$ on võrdhaarne ja OM on tema kõrgus. Seega $|A'M| = |MA|$. Et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2 : 1$, siis $|FM| = \frac{1}{2}|MA|$. Seega $|A'F| = |FM|$. Teiselt poolt $|BF| = |FC|$. Järelikult on nelinurk $A'BMC$ rööpkülik ja tema vastasküljed on paralleelsed. Siis aga on kolmnurk ABD sarnane kolmnurgaga AHC paralleelsete külgede tõttu, kusjuures sarnasustegur on lõikude AB ja AH pikkuste suhe ehk 2. Samamoodi on kolmnurk ACE sarnane kolmnurgaga AGB sama teguriga. Homoteetia keskpunktiga A ja teguriga 2 teisendab kolmnurga ABC kolmnurgaks AED, kolmnurga ABC ümberringjoone



Joonis 8

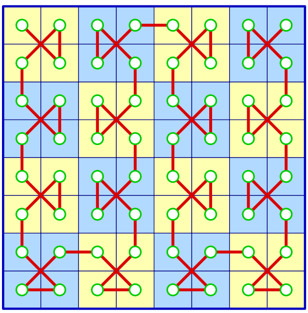
keskpunkt O aga teiseneb sirge AO teiseks lõikepunktiks nimetatud ümberringjoonega.

Märkus. Homoteetia kasutamise asemel võime leida sirge AO teise lõikepunkti P antud ringjoonega ning tõestada, et $|AP| = 2|AO|$, $|DP| = 2|CO|$ ja $|EP| = 2|BO|$.

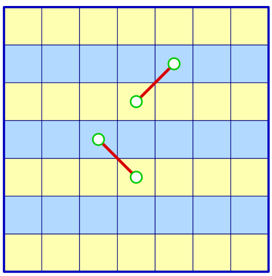
5. *Vastus:* $n = 2k$, kus k on suvaline positiivne täisarv.

Tõestame, et kui n on paarisarv, siis sobiv teekond leidub. Jaotame mängulaua plokkideks mõõtmetega 2×2 (joonis 9) ning paigutame nupu ülemisele vasakule ruudule. Seda ruutu sisaldava ploki läbimiseks nihutame nuppu järgmiselt: alla-paremale, üles, alla-vasakule, alla. Sama käigukombinatsiooni kordame kuni jõuame plokkide veeru alumisse plokki. Seal liigume järgmiselt: alla-paremale, vasakule, üles-paremale, paremale. Nüüd on esimene plokkide veerg läbitud. Teise veeru alumises plokis liigume alla-paremale, vasakule, üles-paremale, üles ning edasi analoogiliselt esimese plokkide veeruga plokkhaaval ülespoole. Sellisel viisil veerge vaheldumisi üles ja alla läbides satub nupp iga ploki igale ruudule täpselt üks kord.

Tõestame, et kui n on paaritu arv, siis sobivat teekonda ei leidu. Vaatleme suvalist teekonda, milles käigutüübid vahelduvad ja mille jooksul nupp ei viibi ühelgi ruudul rohkem kui üks kord. Värvime ruudustikus teise, neljanda, kuuenda jne rea ruudud tumedaks (joonis 10), tumedaid ruute on siis kokku $\frac{n^2 - n}{2}$. Iga diagonaalsuunas tehtud käiguga seostub üks tume ruut, sest selline käik peab alati kas algama või lõppema tumedal ruudul. Et teekond ei läbi ruute korduvalt ja kahte diagonaalkäiku ei tehta järjest, siis vastavad erinevatele käikudele erinevad tumedad ruudud. Järelikult saab teekond sisaldada ülimalt $\frac{n^2 - n}{2}$ diagonaalkäiku ja järelikult ülimalt $\frac{n^2 - n}{2} + 1$ mitte-diagonaalkäiku, kokku ülimalt $n^2 - n + 1$ käiku. Juhul



Joonis 9



Joonis 10

$n \geqslant 3$ on see arv väiksem kui kõigi ruutude läbimiseks vajalik käikude arv $n^2 - 1$.

12. klass

1. Eeldame, et n-ruudulise laeva märkimiseks on paaritu arv võimalusi. Jaotame kõik laevad klassidesse nii, et samasse klassi kuuluvad parajasti need laevad, mis on üksteisest saadavad vertikaalsete ja horisontaalsete peegelduste ning nihete abil. Siis peab leiduma klass, milles on paaritu arv laevu.

   Valime sellest klassist mingi laeva L. Oletame, et L ei ole sümmeetriline teda tihedalt ümbritseva ristküliku vertikaalse või horisontaalse sümmeetriatelje suhtes. Siis mitte ükski laev sellest klassist ei ole vastava telje suhtes sümmeetriline. Seetõttu jagunevad kõik vaadeldava klassi laevad paarideks: laev ise ja tema peegeldus vastavast teljest; siis aga kuuluks vaadeldavasse klassi paarisarv laevu. Järelikult peab laev L olema sümmeetriline nii vertikaal- kui ka horisontaaltelje suhtes.

   Laeva L ümbritseva ristküliku küljepikkus peab nii horisontaalsuunas kui ka vertikaalsuunas olema paarisarv ruute, sest paaritu laiusega ristküliku paigutamiseks paarisarvulisele (10-ruudulisele) küljepikkusele on paarisarv võimalusi; siis kuuluks vaadeldavasse klassi jällegi paarisarv laevu. Seega jaotavad vertikaalne ja horisontaalne sümmeetritelg laeva L ruudud neljaks lõikumatuks osaks, mis on üksteisega peegelsümmeetrilised. Et igasse ossa kuulub võrdne arv ruute, siis jagub laeva ruutude arv 4-ga.

2. *Vastus:* $\dfrac{1+\ln\ln 2}{\sqrt{2}\ln 2}$.

   Leiame kõigepealt funktsiooni $h(x) = 2^x - x$ miinimumkoha. Et selle funktsiooni tuletis on $h'(x) = 2^x \ln 2 - 1$, siis peab kehtima võrdus $2^x \ln 2 - 1 = 0$, millest

   $$2^x = \frac{1}{\ln 2} \qquad \text{ja} \qquad x = -\frac{\ln\ln 2}{\ln 2}.$$

   See on tõesti miinimumkoht, sest $h'(x)$ on kasvav. Funktsiooni h väärtus sellel kohal on

   $$h(x) = \frac{1}{\ln 2} + \frac{\ln\ln 2}{\ln 2} = \frac{1+\ln\ln 2}{\ln 2}.$$

   Siin $1 + \ln\ln 2 = \ln(e\ln 2)$. Et $2 < e < 4$, siis $\ln(e\ln 2) > \ln(2\ln 2) = \ln\ln 4 > > \ln\ln e = 0$. Järelikult on funktsiooni h väärtus miinimumkohal positiivne ehk funktsiooni $g(x) = 2^x$ graafik asub kõikjal funktsiooni $f(x) = x$ graafikust kõrgemal. Vaatleme nüüd punkte koordinaatidega $A(x, f(x))$ ja $B(x, g(x))$ ning olgu C punkti B projektsioon funktsiooni f graafikule. Kolmnurk ABC on täisnurkne ja võrdhaarne, sest $\angle BAC = 45^\circ$. Järelikult

$|BC| = \dfrac{|AB|}{\sqrt{2}} = \dfrac{h(x)}{\sqrt{2}}$. Seega saavutab kaugus $|BC|$ minimaalse väärtuse parajasti siis, kui $h(x)$ saavutab minimaalse väärtuse. Otsitav minimaalne kaugus on niisiis

$$\frac{h(x)}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \ln\ln 2}{\sqrt{2}\ln 2}.$$

Märkus. Ülesande vastusel on ka teisi kujusid, näiteks $\dfrac{\log_2 e - \log_2 \log_2 e}{\sqrt{2}}$.

3. *Vastus:* a) väide kehtib; b) väide ei kehti.

Lahendus 1. a) Võtame nendeks n arvuks arvud $(n^2)!$, $2(n^2)!$, $3(n^2)!$, …, $n(n^2)!$. Suvalise kahe arvu korrutis jagub arvuga $(n^2)!(n^2)!$, ülejäänud arvude summa aga avaldub kujul $k(n^2)!$, kus k on mingi positiivne täisarv, mis on kindlasti väiksem arvust $1 + 2 + \ldots + n$, seega ka arvust n^2.

b) Oletame, et mingi n korral sellised n arvu leiduvad, olgu nad järjestatud kasvavas järjekorras: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Siis ühelt poolt

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-2} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} = (n-2)a_{n-2},$$

teiselt poolt aga

$$a_{n-1}a_n \geqslant (n-1)a_n > (n-2)a_{n-2}.$$

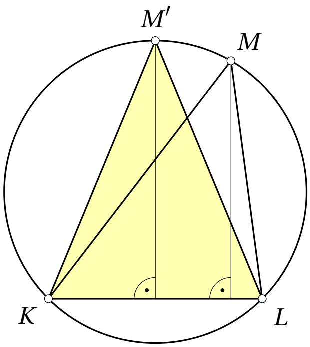
Seega $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-1}a_n$, millest järeldub, et arvude a_1, a_2, …, a_{n-2} summa ei saa jaguda arvude a_{n-1} ja a_n korrutisega.

Lahendus 2. a) Valime suvalised paarikaupa erinevad arvud b_1, b_2, …, b_n ning olgu m nendest arvudest moodustatud kõikvõimalike $(n-2)$-liikmeliste summade vähim ühiskordne. Iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral võtame $a_i = mb_i$. Suvalise kahe arvu a_k ja a_l korrutis $a_k a_l = (mb_k) \cdot (mb_l)$ jagub ülejäänud arvude summaga, sest sellega jagub m^2.

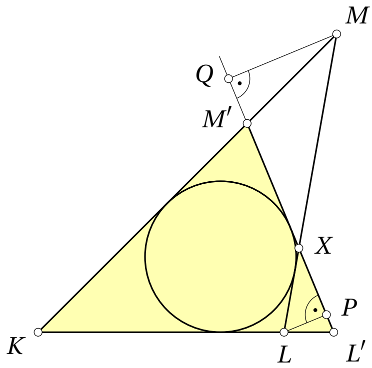
b)-osa tõestame nagu esimeses lahenduses.

4. *Lahendus 1.* Tõestame, et sama ümberringjoone raadiuse puhul on suurim pindala võrdkülgsel kolmnurgal. Kui kolmnurgal KLM leidub kaks erineva pikkusega külge, näiteks KM ja LM, siis valime kolmnurga KLM ümberringjoonel sellise punkti M', et $|KM'| = |LM'|$ (joonis 11). Kolmnurkade KLM ja KLM' alused on ühised, aga esimese kolmnurga kõrgus on väiksem, järelikult on ka esimese kolmnurga pindala teise omast väiksem. Seega ei saa KLM olla suurima pindalaga.

Tõestame, et sama siseringjoone raadiuse puhul on vähim pindala samuti võrdkülgsel kolmnurgal. Kui kolmnurga KLM puhul näiteks kehtib $\angle KLM > \angle KML$, siis vaatleme kolmnurka $KL'M'$, kus punktid L' ja M' on valitud vastavalt sirgetel KL ja KM nii, et $\angle KL'M' = \angle KM'L'$ ja lõik



Joonis 11



Joonis 12

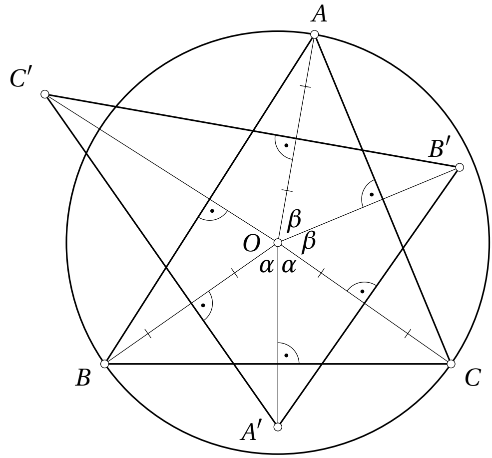
$L'M'$ on siseringjoone puutuja (joonis 12). Olgu X sirgete LM ja $L'M'$ lõikepunkt. Tõmbame punktidest L ja M sirgele $L'M'$ vastavalt ristlõigud LP ja MQ. Siis $|XM'| > |XL'|$, samuti $|MQ| > |LP|$, sest $|XQ| > |XP|$ ja täisnurksed kolmnurgad MQX ja LPX on sarnased. Seega on kolmnurga $MM'X$ pindala suurem kui kolmnurga $LL'X$ pindala ning järelikult on ka kolmnurga KLM pindala suurem kui kolmnurga $KL'M'$ pindala. Seega ei saa KLM olla vähima pindalaga.

Olgu R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Et kolmnurga $A'B'C'$ küljed on risti vastavalt lõikudega OA, OB ja OC (joonis 13) ning poolitavad neid, siis on O kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunkt ning selle kolmnurga siseringjoone raadius on $\frac{R}{2}$. Võrdkülgne kolmnurk ümberringjoone raadiusega R ja võrdkülgne kolmnurk siseringjoone raadiusega $\frac{R}{2}$ on võrdse pindalaga S, sest võrdkülgse kolmnurga mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani nii, et tipu poole ja külje poole jääva osa pikkused suhtuvad nagu 2 : 1. Eelneva põhjal seega $S_{ABC} \leqslant S \leqslant S_{A'B'C'}$.

Lahendus 2. Olgu R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius ning α, β ja γ kolmnurga nurgad tippude järjekorras. Siis $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle COA = 2\beta$ ja $\angle AOB = 2\gamma$. Seetõttu

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB} = \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Et kolmnurk BOC on võrdhaarne, siis on külje BC keskristsirge OA' tema nurgapoolitaja, seetõttu $\angle BOA' = \angle COA' = \alpha$. Samamoodi $\angle COB' = \angle AOB' = \beta$ ja $\angle AOC' = \angle BOC' = \gamma$. Vaatleme kolmnurka $B'OC'$. Küljele $B'C'$ tõmmatud kõrgus on $\frac{R}{2}$, järelikult $|B'C'| = \frac{R}{2}(\tan\beta + \tan\gamma)$ ning



Joonis 13

selle kolmnurga pindala on $S_{B'OC'} = \dfrac{R^2}{8}(\tan\beta + \tan\gamma)$. Analoogiliselt leiame $S_{C'OA'} = \dfrac{R^2}{8}(\tan\gamma + \tan\alpha)$ ja $S_{A'OB'} = \dfrac{R^2}{8}(\tan\alpha + \tan\beta)$. Seega

$$S_{A'B'C'} = S_{B'OC'} + S_{C'OA'} + S_{A'OC'} = \frac{R^2}{4}(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma).$$

Funktsioon $f(x) = \tan x - 2\sin 2x$ on lõigul $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nõgus, sest tema teine tuletis

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + 8\sin 2x$$

on sellel lõigul mittenegatiivne. Jenseni võrratuse põhjal

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geqslant 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3\left(\tan\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 0,$$

millest $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \geqslant 2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin 2\gamma$. Viimase võrduse abil saamegi $S_{A'B'C'} \geqslant S_{ABC}$.

Lahendus 3. Kolmnurga ABC pindala on

$$S_{ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

nagu nähtub kolmnurga pindala valemist $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, kui avaldada seal a ja b siinusteoreemist. Kolmnurga $A'B'C'$ pindala on analoogiliselt eelmise lahendusega

$$S_{A'B'C'} = \frac{R^2}{4}(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) = \frac{R^2}{4}\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma,$$

sest kui $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, siis $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$. Seega kolmnurkade pindalade suhe on

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Funktsioon $f(x) = \cos x$ on lõigul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ kumer, mistõttu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse ning Jenseni võrratuse abil

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} \leqslant 8\left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leqslant 8\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = 8\cos^3\frac{\pi}{3} = 1.$$

5. Et igal konstruktsioonisammul kummaski keeles sõna pikkus kahekordistub, siis esinevad kummaski keeles ainult sõnad pikkustega kujul 2^n, need on parajasti sõnad, mis on saadud n sammuga.

Tõestame, et täpselt n konstruktsioonisammuga saadavaid sõnu on kummaski keeles 2^n. Tõepoolest, 0 sammuga on võimalik kummaski keeles saada ainult üks sõna A. Iga k-sammuline sõna annab kaks erinevat $(k+1)$-sammulist sõna ning kaks erinevat k-sammulist sõna annavad ka erinevad $(k+1)$-sammulised sõnad, sest esialgne sõna moodustab tuletatud sõna osa. Järelikult on $k+1$ sammuga saadud sõnu parajasti kaks korda rohkem kui k sammuga saadud sõnu. Ülesande lahendamiseks piisab seega tõestada, et iga ababi keele sõna kuulub ululu keelde.

Kui ababi sõna on saadud 0 sammuga, siis ta ilmselt kuulub ululu keelde. Eeldame, et väide kehtib kõigi ababi keeles k sammuga saadud sõnade korral ja vaatleme mingit $k+1$ sammuga saadud sõna t. Siis ababi keele mingi sõna s korral $t = s \oplus s$ või $t = s \oplus \bar{s}$. Eelduse põhjal leidub k-liikmeline operatsioonide järjend ululu keele reeglite järgi (igal sammul moodustada kas sõna kujul $a \otimes a$ või $a \otimes \bar{a}$), millega sõnast A saab konstrueerida sõna s.

- Kui sõna t saadakse ababi keeles reegliga $t = s \oplus s$, siis rakendame ululu keeles eelnimetatud operatsioonide järjendit sõnale AA. Lihtne on näha, et pärast iga sammu tekkiv sõna on kujul $a \oplus a$, kus a on parajasti sõna s konstrueerimisprotsessi vahetulemus pärast samu operatsioone, sest ululu keeles on iga operatsiooni mõju kahest võrdsest poolest koosneva sõna esimesele ja teisele poolele sama.
- Kui sõna t saadakse ababi keeles reegliga $t = s \oplus \bar{s}$, siis rakendame ululu keeles seda operatsioonide järjendit sõnale AB. Sellisel juhul saame pärast iga sammu sõna kujul $a \oplus \bar{a}$, kus a on sõna s konstrueerimisprotsessi vastav vahetulemus, sest kui sõna üks pool on teise „peegelpilt“, siis pärast ululu keele operatsiooni rakendamist saame jälle sama omadusega sõna.

Seega kummalgi juhul kuulub t ululu keelde.