Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 | Lõppvoor | **Hindamisskeemid**

9. klass

1. *(Kaie Kubjas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Õige vastus ja tähelepanek, et $a'b' + 1 = da'b'$ (vaata lahendust 3): 3 p
- Õige vastus ja tähelepanek $\text{SÜT}(a, b) \cdot \text{VÜK}(a, b) = \text{SÜT}(a, b) + \text{VÜK}(a, b)$: 2 p
- Ainult õige vastus: 1 p
- Ebatäpsuste eest võtsime maha 1 või 2 punkti olenevalt vea suurusest.

2. *(Jekaterina Prostakova ja Anton Stalnuhhin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Õige lahendus, aga selgitused pole piisavad: 6 p
- Õige idee ja õige joonis, aga selgitused puuduvad: 4 p
- Õige idee, aga selgitused puuduvad: 3 p

3. *(Hannes Jukk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

Lahendus 1.

- Lahenduses on põhjendamata, miks väitevastase eelduse kohaselt (leidub „suurim“ arv) suurim arv on suurem kui ülejäänud arvude aritmeetiline keskmine: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

Lahendus 2

- Põhjendatakse erijuhtum (nt $n = 2$): 1 p
- Põhjendab, et mingid kaks arvu on võrdsed (nt $a_1 = a_2$), kuid jätab sel kohal lahenduse pooleli: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

4. *(Jan Willemson)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Lahendus, milles on kasutatud tõestamata väidet, et $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, väidet, et $\triangle ACD$ on võrdhaarne või midagi samaväärset: 1 p

- Näidatud, et $\triangle CDE$ on võrdhaarne: 1 p
- Leitud $\triangle ABC$ nurgad: 0 p

5. *(Kati Smotrova)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud, et nõutud omadustega laevastikus saab olla 16 ruutu: 3 p
   - Näidatud, et nõutud omadustega laevastikus ei saa olla vähem kui 16 ruutu: 4 p

     Sealhulgas:
     - näidatud, et ühe „riba“ jaoks on vaja vähemalt 4 laeva: *1 p*

   Kui õpilane luges ülesandest välja, et laev peab koosnema vähemalt kahest ruudust, ja leidis selle jaoks õige näite, sai ta esimeses osa eest 2 p.

10. klass

1. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Täielik lahendus: 7 p
2. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse a)-osa ja b)-osa eest antud punktid summeeriti.
   - osas a) näite toomine: 1 p
   - osa b) eest anti punkte järgmiselt:
     - Tähelepanek, et paaritu arvu x korral arv $x^2 - 1$ jagub neljaga: *1 p*
     - Näidatud ainult, et arvude a, b ja c seas leidub paarisarv: *3 p*
     - Näidatud ainult, et kolmik, kus kõik arvud annavad neljaga jagamisel jäägi 2, ei sobi, ehk ekvivalentselt, kui $ab + 1$ on paaritu ruut, siis üks arvudest a või b jagub neljaga: *4 p*
     - Korralik lahendus: *6 p*
3. *(Elts Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Õige joonis: 1 p
   - Leitud mõned õiged seosed nurkade vahel, kuid ei selgu, kuidas siit jõutakse eesmärgini: 2 p
   - Jõutud ühe sammu kaugusele lõppeesmärgist: 2 p
   - Tõestus viidud lõpule: 2 p

   Kui oli ainult tõestatud tulemus mingil erijuhul (mis taandub võrdkülgse kolmnurga juhule), anti 2 punkti.

4. *(Uve Nummert)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Täielik lahendus, kuid vastuses on lisatud arvud -2, -3, -4, -5, -7: 6 p
- Lahendades 6 võrrandit, võttes $\left[\frac{n}{2}\right]$ väärtuseks $\frac{n}{2}$ ja $\frac{n-1}{2}$ ning $\left[\frac{2n}{3}\right]$ väärtuseks $\frac{2n}{3}$, $\frac{2n-1}{3}$ ja $\frac{2n-2}{3}$, on saadud õige vastus, kuid seda ei ole kontrollitud ega näidatud, et saadud lahendid rahuldavad vastava võrrandi aluseks olnud tingimusi: 6 p
- Muidu õige lahendus, kuid negatiivse arvu täisosa tõlgendatakse valesti või on põhjendamata, miks $x \geqslant 0$: 5 p
- Piirkond, kust lahendeid otsitakse, on leitud sisuliselt proovimise teel; vastus on õige või mõni lahend puudu: 3 p
- Piirkond, kust lahendeid otsitakse, on leitud sisuliselt proovimise teel; vastus on poolik või sisaldab ka negatiivseid arve: 2 p
- On üritatud võrrandit analüüsida, kuid tehtud seda vigaselt; vastus vale: 1 p

Paljud lahendajad olid täisosa definitsiooni negatiivsete arvude korral tõlgendanud valesti (ülemise täisosana), kuigi see definitsioon oli ülesande tekstis kirjas.

5. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näitamine, et kirjeldatud omadusega arv ei saa olla suurem kui 25: 3 p

  Sealhulgas:
  - idee näidata, et $n > 25$ ühest ruudust koosneva laeva paigutamine on võimatu: *1 p*
- Näitamine, et 25 on kirjeldatud omadusega: 4 p

  Sealhulgas:
  - konstruktsioon 25 ühest ruudust koosneva laevaga: *1 p*

Rohkem kui pooled jõudsid õige vastuseni. Paraku sai ka enamik õige vastuse esitanutest punkte vähe, sest põhjendused olid liiga ebamäärased.

Näiteks ei saanud arvu 25 sobivuse osas punkte põhjenduste eest, mis rõhusid vaid suuremate laevade paigutamise suuremale mugavusele selle tõttu, et neid saab panna kompaktsemalt kui väikseid ja jätavad seetõttu rohkem ruumi vabaks. Niisugune arutlus pole veenev. Näiteks tekib küsimus, kas vaba ruum ei või jaotuda ruudustikul nii halvasti, et tema olemasolust hoolimata pole võimalik vajaliku suurusega laevu paigutada.

Selleks, et näidata, et $n > 25$ ühest ruudust koosneva laeva paigutamine on võimatu, ei piisa nägemisest, et kui 25 ühest ruudust koosnevat laeva on mingil konkreetsel viisil juba paigutatud, siis sinna pole enam ühtki laeva võimalik lisada. Jääb küsimus, kas mingi teise paigutuse korral ehk oleks see siiski võimalik.

Kahjuks terve rida võistlejaid oli teksti ühel või teisel viisil valesti mõistnud. Üks üsna levinud väärtõlgendus oli, et arvati, et küsitakse suurimat naturaalarvu n, mille jaoks leidub selline laevastik, et n iga esituse korral positiivsete täisarvude summana sisaldab see laevastik iga liidetava jaoks laeva, mille suurus on see liidetav. Niimoodi mõistnud said vastuseks 7 või 9.

Mitu võistlejat olid ka eeldanud, et liidetavate arv peab olema täpselt 2.

11. klass

1. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Leidmine, milliste x väärtuste korral on avaldise $\sin\cos x$ väärtus maksimaalne: 3 p
   - Leidmine, milliste x väärtuste korral on avaldise $\cos\sin x$ väärtus maksimaalne: 2 p
   - Lahenduse lõpuleviimine: 2 p

   Mitmel lahendajal oli leitud antud avaldise üks või mitu maksimumkohta, ent polnud põhjendatud, miks on leitud kõik maksimumkohad.

2. *(Juhan Aru)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud, et $\dfrac{m+n+p}{m+p-n}$ või $\dfrac{(m+n+p)^2}{2mp}$ peab olema täisarv: 2 p
   - Pythagorase teoreemist järeldatud, et $m+n=p^2$ ja $n-m=1$: 2 p
   - Näidatud, et $p-1 \mid 2$: 2 p
   - Näidatud, et $p \neq 2$: 1 p

   Vahel harva sai punkte antud ka mõne äärmiselt huvitava tähelepaneku eest.

3. *(Martin Pettai)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Mainitud, et iga $n \geq 6$ korral $F_n > n$ või et iga $n \geq 8$ korral $F_n > 2n$: 1 p
   - Tõestatud, et iga $n \geq 6$ korral $F_n > n$: 1 p
   - Tõestatud, et iga $n \geq 8$ korral $F_n > 2n$: 1 p
   - Eeldusel, et iga $n \geq 6$ korral $F_n > n$, näidatud, et $m \geq 6$ ja $n \geq 6$ korral lahendeid ei leidu: 1 p

- Eeldusel, et iga $n \geq 8$ korral $F_n > 2n$, näidatud, et $m < 8$ ja $n \geq 8$ korral lahendeid ei leidu: 1 p
- Leitud igast sümmeetriliste lahendite paarist $((x, y), (y, x))$ vähemalt üks lahend: 1 p
- Leitud kõik lahendid: 1 p

4. *(Oleg Petšonkin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Kui ilma tõestuseta eeldatud, et kolmurgad ABC ja ADE on sarnased sarnasusteguriga 2, aga edasine tõestus on täielik: 2 p
- Kui ilma tõestuseta eeldatud, et $MB \parallel A'C$ ja $MC \parallel A'B$, aga edasine tõestus on täielik: 3 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Konstantin Tretjakov)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Ainsa lahendusena leitud $n = 2$: 0 p
- Näidatud ainult, kuidas on võimalik ruutu läbida juhul, kui n on paaris: 3 p
- Täislahendus: 7 p

12. klass

1. *(Meelis Kull)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Laevade kategooriatesse jagamine: 3 p
- Tõestus, et kõigis kategooriates peale ühe on paarisarv laevu: 2 p
- Tõestus, et kui viimases kategoorias on paaritu arv laevu, siis n jagub 4-ga: 2 p

2. *(Mart Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Lahendus 1.

- Funktsiooni $h(x) := 2^x - x$ miinimumkoha leidmine: 2 p
- Funktsiooni h miinimumväärtuse $h_{\min}$ leidmine: 2 p
- Tähelepanek (koos põhjendustega), et otsitav suurus on $\frac{h_{\min}}{\sqrt{2}}$: 2 p
- Vastus: 1 p

Lahendus 2.

- Tähelepanek (põhjendusega), et punktis Q peab funktsiooni $y = 2^x$ puutuja olema paralleelne sirgega $y = x$: 2 p
- Punkti Q koordinaatide leidmine: 1 p

- Tähelepanek, et PQ on risti sirgega $y = x$: 1 p
- Punkti P koordinaatide leidmine: 1 p
- Punktide P ja Q vahelise kauguse leidmine: 2 p

3. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- osa a): 4 p
- osa b): 3 p

Kui b)-osas esinesid võrratustes pisivead, siis võeti selle osa eest 1 punkt maha.

4. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kolmnurga ABC pindala avaldamine R, α, β, γ kaudu: 2 p
- Kolmnurga $A'B'C'$ pindala avaldamine R, α, β, γ kaudu: 2 p
- Saadud avaldiste omavaheline võrdlemine: 3 p

5. *(Reimo Palm)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Leitud ainult mõned konkreetsed sõnad kummaski keeles väiksema sammude arvu korral: 0 p
- Tehtud mitu kasulikku esialgset järeldust, mis ei puuduta ühe keele sõnade kuulumist teise keelde, näiteks et pikkusega 2^n sõnu on 2^n või kummaski klassis ühepalju: 1 p
- Püütakse tõestada sisalduvust ainult ühes suunas, tõestuse ideed saab lihtsasti laiendada erijuhult üldjuhule: 3 p
- Täielik lahendus: 7 p

Mittepiisavate põhjenduste eest võis 1–2 punkti kaotada.