Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 | Lõppvoor | **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$ab = \text{SÜT}(a, b) + \text{VÜK}(a, b).$$

2. Tõesta, et ringi raadiusega 2 saab täielikult katta 7 ühikringiga.

3. Antud on $n \geqslant 2$ reaalarvu. On teada, et ükski neist arvudest pole suurem kui ülejäänud arvude aritmeetiline keskmine. Tõesta, et kõik antud arvud on võrdsed.

4. Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga C suurus on 120°. Kolmnurga alusel AB valitakse punktid D ja E nii, et $|AD| = |DE| = |EB|$. Leia kolmnurga CDE nurkade suurused.

5. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Nimetame laevaks ühikruutude komplekti, mille saab koostada mingist ruudust lähtudes nii, et igal sammul lisatakse juurde üks ruut, millel on mõne juba komplekti valitud ruuduga ühine külg. Nimetame laevastikuks sellist laevade hulka, milles ükski kaks laeva ei sisalda ühise tipuga ruute. Leia vähim võimalik ruutude arv laevastikus, mida ei saa täiendada ühegi uue laevaga.

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta summa

$$\frac{1}{1+2^{-2006}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{1}{1+2^{0}}+\frac{1}{1+2^{1}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{2006}}.$$

2. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et $ab+1$, $bc+1$ ja $ca+1$ on kõik täisarvude ruudud.

a) Too näide sellistest arvudest a, b ja c.

b) Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b ja c jagub 4-ga.

3. Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AC punktis G ning tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AB punktis H. On teada, et kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte üks lõikepunktidest asub küljel BC. Tõesta, et nurga BAC suurus on 60°.

4. Leia võrrandi

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]=x$$

kõik reaalarvulised lahendid. (Siin tähistab $[z]$ reaalarvu z täisosa, st suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu z.)

5. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Nimetame laevaks ühikruutude komplekti, mille saab koostada mingist ruudust lähtudes nii, et igal sammul lisatakse juurde üks ruut, millel on mõne juba komplekti valitud ruuduga ühine külg. Nimetame laevastikuks sellist laevade hulka, milles ükski kaks laeva ei sisalda ühise tipuga ruute. Leia suurim naturaalarv, mida suvalisel viisil positiivsete täisarvude summana esitades leidub laevastik, mille laevade ruutude arvud on parajasti summa liidetavad.

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 | Lõppvoor | **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ suurim väärtus ning kõik arvud x, mille korral see suurim väärtus realiseerub.

2. Täisnurkse kolmnurga ühe kaateti pikkus on algarv ning ülejäänud külgede pikkused on mingid täisarvud. Kolmnurga ümbermõõdu ja siseringjoone diameetri suhe on samuti täisarv. Leia kõik võimalused, millised saavad olla selle kolmnurga külgede pikkused.

3. Fibonacci arvude jada (F_n) rahuldab tingimusi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ja iga $n \geqslant 3$ korral $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral $F_m \cdot F_n = mn$.

4. Kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O ja mediaanide lõikepunkt M, kusjuures sirge OM on risti sirgega AM. Olgu A' sirge AM teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega. Sirged BA' ja AC lõikuvad punktis D ning sirged CA' ja AB lõikuvad punktis E. Tõesta, et kolmnurga ADE ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

5. Antud on ruuduline mängulaud mõõtmetega $n \times n$. Mängulaua mingile ruudule asetatakse nupp, millega on lubatud teha kahte tüüpi käike: nupu võib nihutada kas suvalisele sellisele naaberruudule, millel on senise ruuduga ühine külg, või suvalisele sellisele naaberruudule, millel on senise ruuduga ühine tipp, kuid mitte ühist külge. Kaks järjestikust käiku peavad alati olema erinevat tüüpi. Leia kõik naturaalarvud $n \geqslant 2$, mille korral on võimalik valida lähteruut ja järgnevad käigud nii, et nupp viibiks mängulaua igal ruudul täpselt üks kord (lõpetades lähteruudust erineval ruudul).

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Nimetame laevaks ühikruutude komplekti, mille saab koostada mingist ruudust lähtudes nii, et igal sammul lisatakse juurde üks ruut, millel on mõne juba komplekti valitud ruuduga ühine külg. Tõesta, et kui kõikvõimalikke n ühikruudust koosnevaid laevu on paaritu arv, siis n jagub 4-ga.

2. Leia vähim võimalik tasandipunktide P ja Q vaheline kaugus, kui P asub funktsiooni $y = x$ graafikul ja Q funktsiooni $y = 2^x$ graafikul.

3. Tõesta või lükka ümber järgmised väited.

a) Iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral leidub n paarikaupa erinevat positiivset täisarvu, millest suvalise kahe arvu korrutis jagub ülejäänud $n-2$ arvu summaga.

b) Mingi täisarvu $n \geqslant 3$ korral leidub n paarikaupa erinevat positiivset täisarvu, millest suvalise $n-2$ arvu summa jagub ülejäänud kahe arvu korrutisega.

4. Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning A', B' ja C' vastavalt kolmnurkade BCO, CAO ja ABO ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et kolmnurga $A'B'C'$ pindala on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC pindala.

5. Aafrikas kõneldava ababi keele tähestik koosneb tähtedest A ja B ning selle keele sõnad on parajasti need, mida saab moodustada järgmise kahe reegliga.

1) A on sõna.
2) Kui s on sõna, siis $s \oplus s$ ja $s \oplus \bar{s}$ on sõnad, kus $\bar{s}$ tähistab sõna, mis saadakse sõnast s, asendades seal kõik tähed A tähtedega B ja vastupidi, ning $x \oplus y$ tähistab sõnade x ja y järjestkirjutamist.

Austraalias kõneldava ululu keele tähestik koosneb samuti tähtedest A ja B ning keele sõnad on parajasti need, mida saab moodustada järgmise kahe reegli abil.

1) A on sõna.
2) Kui s on sõna, siis $s \otimes s$ ja $s \otimes \bar{s}$ on sõnad, kus $\bar{s}$ tähistab sama nagu eelnevas ning $x \otimes y$ tähistab ühepikkuste sõnade x ja y korral sõna, mille saame, kui kirjutame sõnade x ja y tähed vaheldumisi üksteise järele, alustades sõna x esimesest tähest.

Tõesta, et ababi ja ululu keel koosnevad samadest sõnadest.