LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, отношение длин которых $9:1$, а рассматриваемый треугольник – на два треугольника, разность площадей которых 48 см^2. Найти длины катетов исходного треугольника.

2. Пусть a, b и c – произвольные целые числа. Доказать, что $a^2+b^2+c^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $a^4+b^4+c^4$ делится на 7.

3. Рома решал математический тест, который состоял из вопросов по алгебре, геометрии и логике. После проверки результатов выяснилось, что Рома ответил правильно на 50% вопросов по алгебре, на 70% вопросов по геометрии и на 80% вопросов по логике. Из вопросов по алгебре и по логике вместе Рома ответил верно на 62%, а из вопросов по геометрии и по логике вместе – на 74%. На сколько процентов всех вопросов теста Рома ответил правильно?

4. Найти все пары (x, y) действительных чисел, которые удовлетворяют равенству
$$(x+y)^2 = (x+3)(y-3).$$

5. Сколько найдётся таких положительных целых чисел, меньших 10000, в десятичной записи которых чётное число чётных цифр и нечётное число нечётных цифр? (Предположим, что ни одно число не начинается с нуля.)

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

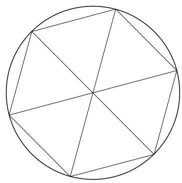
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Семеро братьев купили круглую пиццу и разрезали её на 12 частей так, как показано на рисунке. Каждый из шестерых старших братьев взял себе по куску в виде равностороннего треугольника; оставшиеся 6 краевых кусочков, которые старшие братья не захотели, отдали младшему брату. Получил ли младший брат больше или меньше пиццы, чем каждый его старший брат?

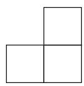


2. Пусть a, b и c – такие действительные числа, что
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$
Доказать, что
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

3. Сколько найдётся таких четырёхзначных чисел, делящихся на 7, при перестановке первой и последней цифры каждого из которых получается снова четырёхзначное число, делящееся на 7?

4. Привести выражение
$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}$$
к виду, в котором разрешёнными операциями являются только сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня.

5. Клетчатую доску размером 5×5 накрывают восемью уголками (фигура на рисунке, состоящая из трёх едничных клеток) так, что одна клетка остаётся свободной. Определить все возможные клетки доски, которые могут остаться свободными после накрытия.



LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Действительные числа x и y удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = -1. \end{cases}$$
Доказать, что $\cos 2x = \cos 2y$.

2. Целые числа a, b и n такие, что число $a+b$ делится на число n, а число a^2+b^2 делится на число n^2. Доказать, что a^m+b^m делится на n^m при любом положительном целом числе m.

3. Почтовая служба страны использует для транспортировки почтовых посылок курьеров, задачей каждого из которых является доставка почты из одного какого-то города в какой-то соседний ему город. Известно, что из каждого города можно отправить почту в столицу P. В случае любых городов A и B назовём город B *важнее* города A, если любой возможный путь посылки из города A в столицу P обязательно проходит через город B.
   а) Доказать, что всегда, когда для каких-то трёх различных городов A, B и C город B важнее города A, а город C важнее города B, то тогда и город C важнее города A.
   б) Доказать, что всегда, когда для каких-то трёх различных городов A, B и C города B и C оба важнее города A, то тогда либо C важнее чем B, либо B важнее чем C.

4. На плоскости дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть для какой-то точки O этой плоскости точки K, L, M, N являются соответственно центрами описанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA. Доказать, что на плоскости найдётся ровно одна точка O, при которой четырёхугольник $KLMN$ – параллелограмм.

5. Найдётся ли такое целое число $n > 1$, что число
$$2^{2^n-1} - 7$$
не является квадратом ни одного целого числа?

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

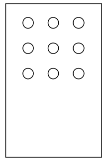
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

5 марта 2005 г.

XII класс

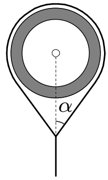
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Компостер в автобусах одной автобусной фирмы всегда пробивает в билете ровно шесть дырок. Возможные места дырок располагаются в виде таблицы 3×3 так, как показано на рисунке. Г-н Заяц желает собрать такой комплект билетов, что при любой комбинации дырок компостера у него имелся бы билет с такой же комбинацией. На билет можно смотреть как спереди, так и сзади. Найти наименьшее возможное число билетов в таком комплекте.



2. На плоскости дан выпуклый n-угольник, причём n нечётно. Доказать, что если на плоскости найдётся точка, из которой все стороны этого n-угольника видны под одним и тем же углом, то такая точка единственная. (Скажем, что отрезок AB виден из точки O под углом γ, если $\angle AOB = \gamma$.)

3. Верёвка, на одном конце которой есть маленькое колечко, вешают на горизонтальную трубу так, что концы остаются висеть. Второй конец продевают сквозь колечко, протягивают на максимальное возможное расстояние от трубы и фиксируют в таком положении, причём верёвка по-прежнему проходит сквозь колечко. Найти угол α, на который изменяется направление верёвки при прохождении колечка.



4. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... называется *периодичной по модулю* n, если найдётся такое положительное целое число k, что при любом положительном целом числе i члены a_i и a_{i+k} дают одинаковый остаток при делении на n. Найдётся ли возрастающая последовательность натуральных чисел, которая
   а) не является периодичной по конечному положительному числу натуральных модулей и является периодичной по всем остальным натуральным модулям;
   б) не является периодичной по бесконечному числу натуральных модулей и является периодичной по бесконечному числу натуральных модулей?

5. *Крюмбель* – это изображённая на рисунке объёмная фигура, состоящая из четырёх белых и одного чёрного единичных кубиков. Найти наименьшую длину ребра куба, при которой возможно в точности заполнить куб крюмбелями.