Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

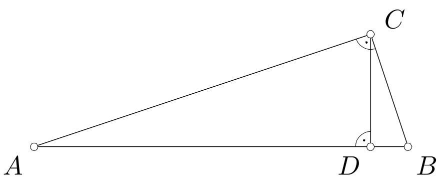
5. märts 2005

Lahendused ja vastused

9. klass

1. *Vastus:* $6\sqrt{10}$ cm ja $2\sqrt{10}$ cm.

   Olgu ABC vaadeldav täisnurkne kolmnurk ja D hüpotenuusile tõmmatud kõrguse aluspunkt (joonis 1). Leiame kõigepealt kolmnurga ABC pindala. Olgu S_1 kolmnurga ACD pindala ja S_2 kolmnurga CBD pindala. Et nendel kolmnurkadel on ühine kõrgus, siis suhtuvad nende pindalad samuti nagu alused. Järelikult $S_1 = 9S_2$. Teiselt poolt $S_1 - S_2 = 48\ \mathrm{cm}^2$. Siit $8S_2 = 48\ \mathrm{cm}^2$, millest $S_2 = 6\ \mathrm{cm}^2$ ja $S_1 = 9 \cdot 6 = 54\ \mathrm{cm}^2$. Kolmnurga ABC pindala on järelikult
$$S = S_1 + S_2 = 60\ \mathrm{cm}^2.$$
   Edasi, et kolmnurgad ACD ja ABC on sarnased, siis $\dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$, millest $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$. Samuti on kolmnurgad CBD ja ABC sarnased, järelikult $\dfrac{|BC|}{|BD|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$, millest $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$. Seega
$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|AB| \cdot |BD|} = \frac{|AD|}{|BD|} = 9$$
   ja
$$\frac{|AC|}{|BC|} = 3.$$
   Avaldame nüüd kolmnurga ABC pindala, kasutades täisnurkse kolmnurga pindala valemit. Selle põhjal $\dfrac{|AC| \cdot |BC|}{2} = 60\ \mathrm{cm}^2$. Asendades eelviimase



Joonis 1

valemi abil $|AC| = 3|BC|$, saame $3|BC|^2 = 2\cdot 60\text{ cm}^2$ ehk $|BC|^2 = 40\text{ cm}^2$. Siit leiame $|BC| = 2\sqrt{10}$ cm ja $|AC| = 3\cdot 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$ cm.

2. Paneme kirja kõik täisarvude jagamisel 7-ga tekkivad jäägid ja leiame igaühe korral, millise jäägi annab 7-ga jagamisel arvu ruut ja neljas aste:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^4	0	1	2	4	4	2	1

Kui arvude a, b ja c ruutude summa jagub 7-ga, siis peab ka ruutude jääkide summa jaguma 7-ga. See on võimalik ainult kahel juhul: jäägid on kas 0, 0, 0 või 1, 2, 4 mingis järjekorras. Arvude neljandate astmete jäägid on siis vastavalt 0, 0, 0 või 1, 4, 2. Kummalgi juhul jagub jääkide summa ja järelikult ka neljandate astmete endi summa 7-ga. Vastupidi, kui arvude a, b ja c neljandate astmete summa jagub 7-ga, siis saame nii neljandate astmete kui ka ruutude võimalikeks jääkideks 0, 0, 0 või 1, 2, 4, mistõttu ka ruutude summa jagub 7-ga.

Märkus. Lihtne on näha, et nelja ja enama arvu korral ülesande väide ei kehti. Olgu näiteks $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ja $d = 2$ (ning võimalikud ülejäänud arvud nullid või üldiselt mingid 7-ga jaguvad arvud). Siis $a^2+b^2+c^2+d^2 = 7$, aga $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 19$ ei jagu 7-ga.

3. *Vastus:* 65%.

Olgu a, g ja l vastavalt õigesti vastatud algebra-, geomeetria- ja loogikaküsimuste arv ning A, G ja L vastavalt algebra-, geomeetria- ja loogikaküsimuste koguarv testis. Ülesande tingimuste põhjal siis $a = 0{,}5A$, $g = 0{,}7G$, $l = 0{,}8L$, $a+l = 0{,}62(A+L)$, $g+l = 0{,}74(G+L)$. Eelviimases ja viimases võrduses asendame vasaku poole suurused eelmiste võrduste põhjal. Eelviimasest võrdusest saame $0{,}5A + 0{,}8L = 0{,}62A + 0{,}62L$ ehk $0{,}12A = 0{,}18L$, millest

$$A = 1{,}5L,$$

viimasest võrdusest saame $0{,}7G+0{,}8L = 0{,}74G+0{,}74L$ ehk $0{,}04G = 0{,}06L$, millest

$$G = 1{,}5L.$$

Nüüd

$$a + g + l = 0{,}5A + 0{,}7G + 0{,}8L = 0{,}75L + 1{,}05L + 0{,}8L = 2{,}6L$$

ning

$$A + G + L = 1{,}5L + 1{,}5L + L = 4L.$$

Õigete vastuste osakaal oli seega

$$\frac{a+g+l}{A+G+L} = \frac{2{,}6}{4} = 65\%.$$

4. *Vastus:* ainus selline paar on $(-3, 3)$.

   Lahendus 1. Avame sulud, viime kõik liikmed ühele poole ja rühmitame, sellega võime antud võrduse kirjutada kujul

   $$x^2 + x(y+3) + (y^2 - 3y + 9) = 0.$$

   Saadud võrdust vaatleme ruutvõrrandina x-i suhtes. Selle ruutvõrrandi diskriminant on

   $$D = (y+3)^2 - 4(y^2 - 3y + 9) = -3y^2 + 18y - 27 = -3(y-3)^2.$$

   Et ruutvõrrandil leiduks reaalarvuline lahend (st arvu y jaoks leiduks sobiv arv x), peab olema $D \geqslant 0$, mis on võimalik ainult $y = 3$ korral. Siis aga omandab ülesande võrdus kuju $(x+3)^2 = 0$, millest $x = -3$.

   Lahendus 2. Avame sulud ja viime kõik liikmed ühele poole:

   $$x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 9 = 0.$$

   Tulemuse pooli korrutame kahega ning rühmitame liikmed. Saame

   $$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) = 0$$

   ehk

   $$(x+y)^2 + (x+3)^2 + (y-3)^2 = 0.$$

   Viimane võrdus kehtib parajasti siis, kui kehtivad võrdused $x + y = 0$, $x + 3 = 0$ ja $y - 3 = 0$ ehk parajasti juhul $x = -3$, $y = 3$.

5. *Vastus:* 455.

   Et ülesande tingimustele vastav arv peab olema väiksem kui 10000 ning sisaldama kokku paaritut arvu numbreid, siis saab ta olla ainult ühe- või kolmekohaline. Ühekohalistest arvudest sobivad parajasti paaritud arvud, mida on 5 (need sisaldavad 0 paarisnumbrit ja 1 paaritu numbri). Kolmekohalisel ülesande tingimusi rahuldaval arvul peavad olema kas kõik 3 numbrit paaritud või 1 number paaritu ja 2 numbrit paaris. Esimesel juhul on meil iga paaritu numbri valikuks 5 võimalust, kusjuures numbreid saame valida üksteisest sõltumatult – seega on niisuguseid arve $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Teisel juhul vaatleme eraldi võimalusi, kus ainus paaritu number on arvus esimesel, teisel või kolmandal kohal. Kui paaritu number on arvus esimesel kohal, siis saame nii selle kui ka kummagi järgneva paarisnumbri üksteisest sõltumatult valida 5 viisil – seega on ka selliseid arve $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Kui paaritu number on arvus teisel või kolmandal kohal, siis on meil arvu esimese paarisnumbri valikuks 4 võimalust (sest arv ei alga 0-ga) ning kummagi järgneva numbri valikuks 5 võimalust, kusjuures numbrid saame jällegi valida üksteisest sõltumatult; kummalgi juhul on sobivaid arve $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. Kokku on ülesande tingimustele vastavaid arve $5 + 125 + 125 + 100 + 100 = 455$.

10. klass

1. *Vastus:* noorim vend sai rohkem pitsat.

   Olgu pitsa raadius 1. Pitsa kogupindala on siis $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Kuuest vanemast vennast igaüks sai endale tüki, mis on võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 1 ning pindalaga
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$
   Noorim vend sai 6 tükki kogupindalaga
$$S_2 = \pi - \frac{6\sqrt{3}}{4}.$$
   Siin on
$$\pi > 3{,}125 = \frac{25}{8} > \frac{7\sqrt{3}}{4},$$
   kus viimane võrratus järeldub võrratusest $25 > 2 \cdot 7\sqrt{3}$, mis on samaväärne võrratusega $25^2 > 14^2 \cdot 3$ ehk $625 > 588$. Järelikult
$$S_2 = \pi - \frac{6\sqrt{3}}{4} > \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} = S_1.$$

2. *Lahendus 1.* Korrutame antud võrduse pooli arvudega a, b ja c ning liidame saadud kolm võrdust. Tulemus on
$$\frac{a^2 + ab + ac}{b + c} + \frac{b^2 + bc + ba}{c + a} + \frac{c^2 + ca + cb}{a + b} = a + b + c$$
   ehk
$$\frac{a^2}{b+c} + a \cdot \frac{b+c}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + b \cdot \frac{c+a}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + c \cdot \frac{a+b}{a+b} = a + b + c.$$
   Koondades kummaltki poolelt võrdsed liikmed, saamegi vajaliku võrduse
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

   Lahendus 2. Viime eelduse vasaku poole murrud ühisele nimetajale, saame
$$\frac{a(c+a)(a+b) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)} = 1.$$
   Järelikult
$$a(c+a)(a+b) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(c+a) = (b+c)(c+a)(a+b)$$

ehk pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0.$$

Samamoodi viime väite vasaku poole murrud ühisele nimetajale:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \\ &\qquad = \frac{a^2(c+a)(a+b) + b^2(b+c)(a+b) + c^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}. \end{aligned}$$

Viimase murru lugejas avame sulud ning rühmitame liikmed, sellega teiseneb lugeja kujule

$$(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + abc),$$

milles teine suluavaldis võrdub eespool saadud seose põhjal nulliga.

3. *Vastus:* 195.

Olgu $n = \overline{abcd}$ vaadeldav neljakohaline arv. Tähistades $\overline{bc} = x$, esitame selle arvu kujul $n = 1000a + 10x + d$. Arvu n esimese ja viimase numbri vahetamisel saame arvu $n' = \overline{dbca} = 1000d + 10x + a$. Et n ja n' on mõlemad neljakohalised, siis peab olema $a \neq 0$ ja $d \neq 0$. Et n ja n' jaguvad mõlemad 7-ga, siis jaguvad 7-ga ka arvud

$$n + n' = 1001(a + d) + 20x$$

ja

$$n - n' = 999(a - d).$$

Kuna 1001 jagub 7-ga ning arvud 20 ja 7 on ühistegurita, siis peab x jaguma 7-ga, kusjuures $0 \leqslant x \leqslant 99$. Seega on x üks arvudest 0, 7, 14, $\ldots$, 98, mida on kokku 15. Kuna arv 999 on 7-ga ühistegurita, siis peab $a - d$ jaguma 7-ga. Arvestades tingimusi $1 \leqslant a, d \leqslant 9$, näeme, et ainsad sobivad paarid (a, d) on $(1, 8)$, $(8, 1)$, $(2, 9)$, $(9, 2)$ ning (a, a), kus $1 \leqslant a \leqslant 9$ – kokku niisiis 13 võimalust. Et arvu x saame valida sõltumatult a ja d valikust, siis on võimalikke kandidaate arvu n kohale üldse $15 \cdot 13 = 195$. Kõik leitud arvud rahuldavad ülesande tingimusi, sest kui $10x$ ja $a - d$ jaguvad 7-ga, siis $1000a + 10x + d = 1001a - (a - d) + 10x$ jagub 7-ga.

4. *Vastus:* $2\sqrt{167} + 1$.

Lahendus 1. Eraldame kuupjuure all asuva avaldise kummastki liidetavast 167-ga jaguvad osad:

$$\begin{aligned} 1342\sqrt{167} + 2005 &= 1336\sqrt{167} + 2004 + 6\sqrt{167} + 1 = \\ &= 8 \cdot 167\sqrt{167} + 12 \cdot 167 + 6\sqrt{167} + 1. \end{aligned}$$

Tulemuse esitame kujul

$$\begin{aligned}1342\sqrt{167}+2005 &= (2\sqrt{167})^3+3\cdot(2\sqrt{167})^2+3\cdot(2\sqrt{167})+1=\\ &=(2\sqrt{167}+1)^3.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}=2\sqrt{167}+1.$$

Lahendus 2. Otsime vastust kujul $a\sqrt{167}+b$, kus a ja b on täisarvud. Siis peab kehtima

$$(a\sqrt{167}+b)^3=1342\sqrt{167}+2005$$

ehk

$$167a^3\sqrt{167}+3\cdot 167a^2b+3ab^2\sqrt{167}+b^3=1342\sqrt{167}+2005.$$

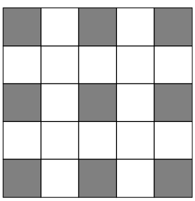
Järelikult peavad a ja b rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}167a^3+3ab^2=1342\\ 501a^2b+b^3=2005.\end{cases}$$

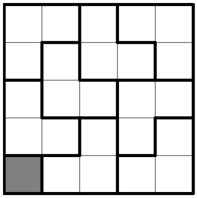
Süsteemi teise võrrandi võime esitada kujul $(501a^2+b^2)b=2005$. Et lahendit otsime eelduse kohaselt täisarvudes, siis peab $501a^2+b^2$ olema arvu 2005 selline tegur, mis on suurem kui 501 (ilmselt ei saa a ega b võrduda nulliga). Ainuke võimalus on seega $501a^2+b^2=2005$, $b=1$, kust $a=2$. Kontrollides näeme, et väärtused $a=2$, $b=1$ rahuldavad ka süsteemi esimest võrrandit. See tähendab, et $(2\sqrt{167}+1)^3=1342\sqrt{167}+2005$.

5. *Vastus:* vabaks võivad jääda joonisel 2 tumedaks värvitud ruudud.

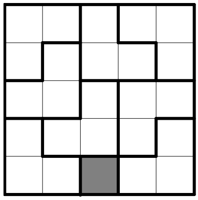
Oletame, et kõik värvitud ruudud on kaetud. Et üks nurgik ei saa katta kahte värvitud ruutu, siis tuleb kasutada vähemalt üheksat nurgikut, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Seega peab kindlasti üks nendest ruutudest vabaks jääma. On kolm põhimõtteliselt erinevat võimalust: vaba ruut asub nurgas, külje keskel või ruudustiku keskel. Kuidas nendel kolmel juhul ruudustikku katta, on näidatud joonisel 3, 4 ja 5.



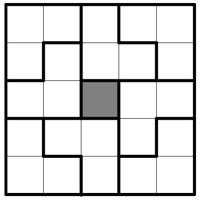
Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4



Joonis 5

11. klass

1. *Lahendus 1.* Tõstame võrduste pooled ruutu, saame

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos y + \cos^2 y = 1$$
$$\cos^2 x + 2\cos x \sin y + \sin^2 y = 1.$$

Liidame tulemused, koondame seoste $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ tõttu mõlemale poolele tekkivad liidetavad 2 ning jagame tulemust 2-ga. Sellega tekib võrdus

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x = 0$$

ehk

$$\sin(x+y) = 0.$$

Järelikult $x + y = k\pi$, kus k on täisarv. Seetõttu $2x = 2k\pi - 2y$, millest $\cos 2x = \cos 2y$.

Lahendus 2. Esimesest võrdusest järeldub $\sin x \geqslant 0$ ja $\cos y \geqslant 0$, teisest võrdusest aga $\sin y \leqslant 0$ ja $\cos y \leqslant 0$. Järelikult saame antud võrrandisüsteemist süsteemi

$$\begin{cases} |\sin x| + |\cos y| = 1 \\ |\cos x| + |\sin y| = 1. \end{cases}$$

Tõstame võrrandite pooled ruutu ja liidame. Seejärel koondame mõlemalt poolelt arvu 2 ning jagame tulemust 2-ga. Sellega tekib võrrand

$$|\sin x| \cdot |\cos y| + |\cos x| \cdot |\sin y| = 0,$$

mis on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0 \\ \cos x \cdot \sin y = 0. \end{cases}$$

Kui esimeses võrrandis võrdub nulliga siinus, siis peab ka teises võrrandis võrduma nulliga siinus. Kahekordse nurga koosinuse valemi põhjal siis

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1,$$
$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y = 1.$$

Kui esimeses võrrandis võrdub nulliga koosinus, siis peab ka teises võrrandis võrduma nulliga koosinus, mistõttu

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1,$$
$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = -1.$$

Lahendus 3. Liidame võrrandid kokku:

$$\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = 0.$$

Kasutades siinuste summa ja koosinuste summa valemit, saame

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 0,$$

millest

$$\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0.$$

Kui $\cos\frac{x-y}{2} = 0$, siis $\frac{x-y}{2} = (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$, millest $2x - 2y = (2k-1)\cdot 2\pi$. Järelikult $\cos 2x = \cos 2y$. Jääb analüüsida juht $\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} = 0$. Siit $\sin\frac{x+y}{2} = -\cos\frac{x+y}{2}$ ehk $\tan\frac{x+y}{2} = -1$, millest $\frac{x+y}{2} = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ja $x + y = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. Seega $\cos y = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ehk $\sin x + \cos y = 0$, mis on vastuolus esimese võrrandiga.

Märkus. Lahendusest 2 nähtub, et antud tingimustel saavad $\cos 2x$ ja $\cos 2y$ omandada vaid väärtusi 1 ja -1. See tähendab, alati kas $x = k\pi$, $y = l\pi$ või $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, kus k ja l on täisarvud (täpsem analüüs näitab, et esimesel juhul peab olema k paaris ja l paaritu, teisel juhul aga k paaritu ja l paaris).

2. *Lahendus 1.* Tõestame, et a ja b jaguvad n-ga, ülesande väide järeldub sellest vahetult. Et

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2),$$

siis $2ab$ jagub n^2-ga. Vaatleme arvu n algteguriteks lahutuses suvalist algarvu p ning eeldame, et ta esineb seal astmes α. Arvu $2ab$ algteguriteks lahutuses esineb algarv p seega vähemalt astmes 2α ning arvu ab algteguriteks lahutuses kindlasti vähemalt astmes $2\alpha - 1$. Järelikult peab üks arvudest a ja b sisaldama algtegurit p vähemalt astmes α. Et $a + b$ jagub n-ga ja seetõttu ka arvuga p^α, siis peab ka teine arvudest a ja b sisaldama algtegurit p vähemalt astmes α. Seega esinevad kõik arvu n algtegurid arvudes a ja b vähemalt sama suures astmes kui arvus n. See tähendab, et a ja b jaguvad n-ga.

Lahendus 2. Tõestame, et arvud a ja b jaguvad arvuga n. Kui n on paarisarv, siis peavad a ja b olema samuti paaris, sest kui a ja b oleksid paaritud, siis annaks $a^2 + b^2$ jagamisel 4-ga jäägiks 2 ja ei jaguks seetõttu arvuga n^2. Jagame arve a, b ja n kõiki 2-ga, tekkivad arvud rahuldavad jälle ülesande eeldusi. Nii jätkates saame arvud a, b ja n esitada kujul $a = 2^k x$, $b = 2^k y$ ja $n = 2^k m$, kus m on paaritu arv ning lisaks $x + y$ jagub m-ga ja $x^2 + y^2$ jagub m^2-ga. Võrdusest

$$(x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x + y)^2$$

näeme, et $(x - y)^2$ jagub m^2-ga ehk $x - y$ jagub m-ga. Et ka $x + y$ jagub m-ga, siis $2x$ ja $2y$ jaguvad m-ga. Siit x ja y jaguvad m-ga, sest m on paaritu. Järelikult ka arvud $2^k x = a$ ja $2^k y = b$ jaguvad arvuga $2^k m = n$.

3. *Lahendus 1.* a) Olgu t suvaline võimalik saadetise teekond linnast A pealinna. Et B on A-st tähtsam, siis täbib t linna B. Teekonna t lõpuosa linnast B pealinna on saadetise võimalik teekond linnast B pealinna. Et C on B-st tähtsam, siis läbib see teekond linna C. Järelikult läbib teekond t linna C.

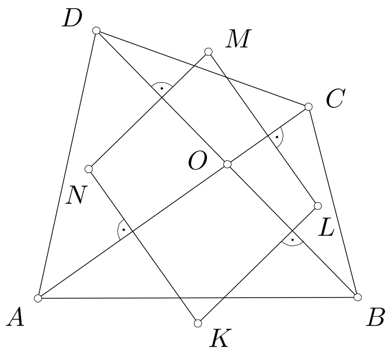
   b) Oletame, et väide ei kehti, st C ei ole tähtsam B-st ja B ei ole tähtsam C-st. Siis leidub tee linnast B pealinna, mis ei läbi linna C, ja tee linnast C pealinna, mis ei läbi linna B. Vaatleme nüüd mingit teed linnast A pealinna. Et linnad B ja C on eelduse põhjal linnast A tähtsamad, siis läbib see tee nii linna B kui ka linna C. Alustades liikumist linnast A seda teed mööda, jälgime, kumb linnadest B ja C tuleb ette esimesena. Kui esimesena jõuame linna B, siis liigume edasi pealinna mööda seda teed, mis ei läbi linna C. Sellega oleme leidnud tee linnast A pealinna, mis ei läbi linna C, see on vastuolus eeldusega, et C on A-st tähtsam. Kui esimesena jõuame linna C, siis saame analoogiliselt vastuolu eeldusega, et B on A-st tähtsam. Seega oli meie esialgne oletus väär.

   Lahendus 2. a)-osa tõestame nagu lahenduses 1.

   b) Eelduse põhjal läbib iga postiteekond linnast A pealinna nii linna B kui ka linna C. Oletame kõigepealt, et leidub kaks teed linnast A pealinna, millest esimene läbib linna B enne linna C ja teine linna C enne linna B. Jättes teede kooseisust ära võimalikud tsüklilised ringkäigud, võime eeldada, et teed ei pöördu tagasi juba külastatud linnadesse. Nüüd aga saame liikuda linnast A pealinna ilma vahepeal linna C läbimata: siirdume linnast A mööda esimest teed linna B ja edasi linnast B mööda teist teed pealinna. See on vastuolus eeldusega, et C on A-st tähtsam. Järelikult läbib iga teekond linnast A pealinna linnu B ja C samas järjekorras.

Üldisust kitsendamata eeldame, et kõik teed linnast A pealinna läbivad kõigepealt linna B ja seejärel linna C. Vaatleme suvalist teed linnast B pealinna. Kui oletada, et see tee ei läbi linna C, siis liidame tema algusesse teeosa linnast A linna B, mis samuti C-d ei läbi; see on võimalik, sest iga tee linnast A pealinna jõuab linna B varem kui linna C. Tulemuseks saame tee linnast A pealinna, mis C-d ei läbi. See on vastuolus tingimusega, et C on A-st tähtsam. Seega peab iga B-st lähtuv tee läbima linna C, st C on B-st tähtsam.

4. Kui O on ülesandes nimetatud omadusega punkt, siis peab kehtima seos $KL \perp BO$, sest punktid K ja L asuvad mõlemad lõigu BO keskristsirgel. Analoogiliselt $LM \perp CO$, $MN \perp DO$ ja $NK \perp AO$. Olgu nüüd O nelinurga diagonaalide lõikepunkt (joonis 6). Siis on nii KL kui ka MN risti sirgega BD, mis tähendab, et $KL \parallel MN$. Analoogiliselt saame $LM \parallel NK$. Järelikult on nelinurga $KLMN$ vastasküljed paralleelsed, st nelinurk on rööpkülik. Vastupidi, kui O on mingi punkt, mille korral nelinurk $KLMN$ on rööpkülik, siis kehtib $KL \parallel MN$. Seega ka $BO \parallel DO$, millest saame, et punkt O asub sirgel BD. Samamoodi näitame, et punkt O asub sigel AC ehk on nelinurga diagonaalide lõikepunkt.



Joonis 6

5. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Näitame, et juhul $n = 5$ valemist saadav arv $2^{31} - 7$ ei ole täisruut. Et $2^{10} = 1024$ annab 11-ga jagades jäägi 1, siis ka $2^{30} = (2^{10})^3$ annab 11-ga jagades jäägi 1 ja $2^{31} = 2 \cdot 2^{30}$ annab jäägi 2. Järelikult $2^{31} - 7$ annab 11-ga jagades jäägi $2 + 11 - 7 = 6$. Vaadates läbi arvude kõikvõimalike kujude $11k$, $11k \pm 1$, $11k \pm 2$, $11k \pm 3$, $11k \pm 4$ ja $11k \pm 5$ ruudud, näeme, et need annavad 11-ga jagades vastavalt jäägid 0, 1, 4, 9, 5 ja 3. Seega ei saa ühegi arvu ruut anda 11-ga jagades jääki 6.

Lahendus 2. Arvutades saame $2^{31} - 7 = 32768 \cdot 65536 - 7 = 2147483641$, kuid $46340^2 = 2147395600$ ja $46341^2 = 46340^2 + 2 \cdot 46340 + 1 = 2147488281$. Seega $46340^2 < 2^{31} - 7 < 46341^2$, millest näeme, et $2^{31} - 7$ pole täisruut.

Märkus 1. Arv $n = 5$ on vähim selline, mille puhul ülesandes nimetatud arv ei ole täisruut, sest $2^3 - 7 = 1^2$, $2^7 - 7 = 11^2$ ja $2^{15} - 7 = 181^2$.

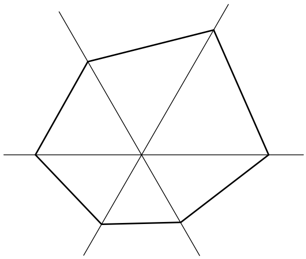
Märkus 2. Lahenduses 1 on 11 vähim arv, millega jagades arv $2^{2^n - 1} - 7$ annab täisruutude jääkidest erineva jäägi. On olemas ka teisi sobivaid arve, näiteks 31.

12. klass

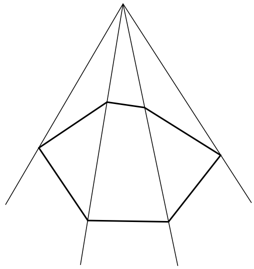
1. *Vastus:* 47.

   Ilmselt võime aukude asemel vaadelda nn mitteauke, st sõlmi, kuhu komposter auku ei löö. Võimalusi valida 9 sõlmest välja 3 terveks jäävat on
   $$\binom{9}{3} = 84.$$
   Üks pilet võib esitada kas ühte kombinatsiooni, mis on sümmeetriline pileti pikitelje suhtes, või kahte erinevat kombinatsiooni, mis on selle telje suhtes teineteise peegelpildid. Sümmeetriliste kombinatsioonide korral peavad olema kas kõik kolm tervet kohta teises veerus (1 võimalus) või üks teises ning ülejäänud kaks samades ridades esimeses ja kolmandas veerus ($3 \cdot 3 = 9$ võimalust). Sümmeetrilisi augukombinatsioone on seega $1 + 9 = 10$, mittesümmeetrilisi aga $84 - 10 = 74$. Pileteid nende võimaluste katmiseks kulub ühtekokku
   $$10 + \frac{74}{2} = 47.$$

2. Tõmbame ülesande tingimustes antud punktist kiired läbi hulknurga tippude. Vastavalt sellele, kas punkt asub hulknurga sise- või välispiirkonnas, on moodustuval kiirtekimbul kaks põhimõtteliselt erinevat võimalust: kiired jagavad võrdseteks nurkadeks kogu tasandi (joonis 7) või ainult ühe nurga (joonis 8). Teisel juhul asuks äärmistel kiirtel kummalgi üks hulknurga tipp ja kõigil vahepealsetel kaks, seega peaks hulknurgal olema paarisarv tippe. See on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult peab ülesande tingimustele vastav punkt asuma vaadeldava hulknurga sisepiirkonnas.



Joonis 7

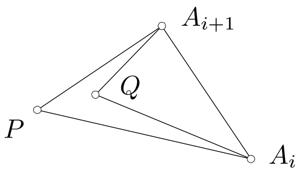


Joonis 8

Oletame nüüd, et hulknurga $A_1A_2\ldots A_n$ sees leidub kaks punkti P ja Q, millest vaadatuna paistavad kõik küljed sama nurga all. Siis peavad iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral kehtima seosed (siin loeme $A_{n+1} = A_1$)

$$\angle A_iPA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}, \qquad \angle A_iQA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}.$$

Et punktid P ja Q on erinevad, siis peavad leiduma hulknurga tipud A_i ja A_{i+1} nii, et punkt Q asub kolmnurga A_iPA_{i+1} sisepiirkonnas või küljel, aga mitte tipus P (joonis 9). Sel juhul aga $\angle A_iQA_{i+1} > \angle A_iPA_{i+1}$, vastuolu. Järelikult saab leiduda ainult üks nõutud omadustega punkt.

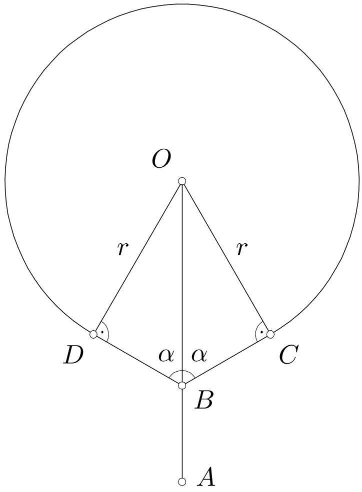


Joonis 9

Märkus. Kui tippude arv n on paaris, siis võib leiduda mitu ülesande tingimustele vastavat punkti. Näiteks ruudu (ja üldse rombi) kõik küljed paistavad sama nurga all kahte vastastippu läbiva sirge igast punktist, mis asub kujundist väljaspool. Suuremate tippude arvu n korral saab selliseid hulknurki konstrueerida kahe n-kiirelise kimbu abil, kusjuures üks neist on joonisel 7, teine aga joonisel 8 kujutatud tüüpi; kiirekimbud paigutada sobivasse asendisse, hulknurga tipud on ühe kimbu kiirte lõikepunktid neile vastavate kiirtega teisest kimbust.

3. *Vastus:* $\dfrac{\pi}{3}$.

Olgu O toru keskpunkt ja r toru raadius. Lisaks olgu l nööri pikkus, A ja B vastavalt nööri lahtine ja silmusega ots ning C ja D vastavalt esimene ja



Joonis 10

viimane puutepunkt toru pinnaga (joonis 10). Leiame kõigepealt lõigu AO pikkuse $d(\alpha)$. Ilmselt $|BC| = |BD| = r \cot \alpha$. Et $\angle COD = \pi - 2\alpha$, siis puutub nööriosa kaarel CD toru nurga $\pi + 2\alpha$ ulatuses ja tema pikkus on $r(\pi + 2\alpha)$. Lahutades nööri kogupikkusest lõikude BC ja BD ning kaare CD pikkused, saame

$$|AB| = l - 2r \cot \alpha - r(\pi + 2\alpha).$$

Samuti

$$|BO| = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Kokkuvõttes $d(\alpha) = |AB| + |BO|$ ehk

$$d(\alpha) = l - 2r \cot \alpha - r(\pi + 2\alpha) + \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Järgnevalt leiame, millise α korral on selle funktsiooni väärtus suurim. Funktsiooni tuletis on

$$d'(\alpha) = \frac{2r}{\sin^2 \alpha} - 2r - \frac{r \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

ehk viies murrud ühisele nimetajale,

$$d'(\alpha) = r\left(\frac{2 - 2\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = r\left(\frac{2\cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right).$$

Tingimus $d'(\alpha) = 0$ annab võrrandi $2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$, millest $\cos\alpha = 0$ või $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Siit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ või $\alpha = \frac{\pi}{3}$, sest kindlasti $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Maksimumkoha määramiseks uurime tuletise $d'(\alpha)$ käitumist leitud punktide ümbruses. Murru nimetaja $\sin^2\alpha$ on vaadeldavas piirkonnas positiivne, murru lugeja $2\cos^2\alpha - \cos\alpha$ on aga ruutparabooli omadusi arvestades negatiivne parajasti siis, kui $0 < \cos\alpha < \frac{1}{2}$. Seega piirkonnas $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ on $d'(\alpha)$ positiivne ehk $d(\alpha)$ kasvab, piirkonnas $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ on $d'(\alpha)$ negatiivne ehk $d(\alpha)$ kahaneb. Järelikult omandab funktsioon maksimaalse väärtuse kohal $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

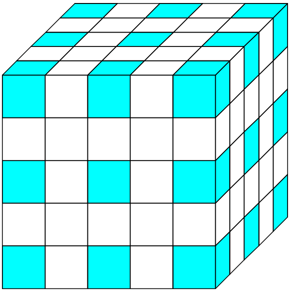
Märkus 1. On huvitav märkida, et maksimum ei realiseeru siis, kui sõlmkoht asub otse vastu toru. Nööri teise otsa kauguste erinevus juhul $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (maksimaalne kaugus) ja juhul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (sõlmkoht vastu toru) on 2,36% toru läbimõõdust.

Märkus 2. On võimalik leida nööri täpne vähim pikkus, mille korral ülesandes leitud optimaalne nurk realiseeruda saab. Nimelt, nööri pikkuse ja toru läbimõõdu suhe peab olema vähemalt $\frac{5\pi + 2\sqrt{3}}{6}$.

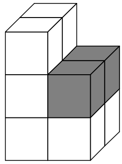
4. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Oletame, et jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on mitteperioodiline lõpliku arvu moodulite järgi, olgu N suurim nendest. Et $2N > N$, siis on vaadeldav jada perioodiline mooduli $2N$ järgi. Teisest küljest, kui liikmed a_i ja a_j annavad arvuga $2N$ jagades sama jäägi, siis ammugi annavad nad arvuga N jagades sama jäägi. Sellest järeldub, et jada on perioodiline ka mooduli N järgi, vastuolu.

b) Tõestame, et jada $a_i = 2^{i-1}$ ei ole perioodiline kõigi paarisarvuliste moodulite järgi ja on perioodiline kõigi paarituarvuliste moodulite järgi. Olgu kõigepealt moodul N paarisarv. Kui jada oleks mooduli N järgi perioodiline, siis saame sarnaselt ülesande a)-osaga tõestada, et jada peab olema perioodiline mooduli iga teguri järgi. Ent mooduli 2 järgi saame jääkide jadaks $1, 0, 0, 0, \ldots$, mis pole perioodiline, seetõttu ei saa vaadeldav jada olla mooduli N järgi perioodiline. Olgu nüüd moodul N paaritu arv. Et võimalike jääkide arv jagamisel N-ga on lõplik, siis peavad mingid kaks jada liiget $a_i = 2^{i-1}$ ja $a_j = 2^{j-1}$, kus $i < j$, andma sama jäägi. Nende vahe $2^{j-1} - 2^{i-1} = 2^{i-1}(2^{j-i} - 1)$ jagub siis N-ga. Et N on paaritu, siis peab $2^{j-i} - 1$ jaguma N-ga. See tähendab, jada liikmed $a_1 = 1$ ja $a_{j-i+1} = 2^{j-i}$ annavad N-ga jagades sama jäägi ning järelikult annavad sama jäägi ka liikmed $a_2 = 2a_1$ ja $a_{j-i+2} = 2a_{j-i+1}$, liikmed $a_3 = 2a_2$ ja $a_{j-i+3} = 2a_{j-i+2}$ jne, st jada on perioodiline mooduli N järgi.



Joonis 11



Joonis 12

5. *Vastus:* 10.

   Et krümbel koosneb 5 ühikkuubist, siis peab kuubi ruumala ja seega ka küljepikkus jaguma 5-ga. Kuupi küljepikkusega 5 ei saa krümblitega täita. Selle tõestamiseks värvime kuubis joonisel 11 näidatud 27 ühikkuupi siniseks. Ühe krümbliga ei saa täita kahte sinist ühikkuupi, järelikult tuleks antud kuubi täitmiseks kasutada vähemalt 27 krümblit. Nende koguruumala $27 \cdot 5 = 135$ on aga suurem kuubi ruumalast $5^3 = 125$.

   Kuubi küljepikkusega 10 saab krümblitega täita. Selleks paneme kahest krümblist kokku joonisel 12 näidatud kujundi, kahest sellisest kujundist moodustame $2 \times 2 \times 5$ risttahuka, nendest omakorda saame aga koostada $10 \times 10 \times 10$ kuubi.