Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

Hindamisskeemid ja kommentaarid

9. klass

1. *(Elts Abel, Maksim Ivanov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Osakolmnurkade pindalade leidmine või kõrguse avaldamine hüpotenuusi lõikude abil: 3 p
   - Hüpotenuusi lõikude pikkuste leidmine: 2 p
   - Kaatetite pikkuste leidmine: 2 p

   Ülesanne näitas, et üldiselt tuntakse täisnurkse kolmnurga geomeetriat hästi.

2. *(Kaie Kubjas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Teisendused, mis ei vii sihile: 0 p
   - Lahendus eeldusel, et a, b ja c jaguvad 7-ga: 1 p
   - Peaaegu täislahendus, kuid vaatamata juht, kus a, b ja c jaguvad 7-ga: 6 p
   - Täislahendus: 7 p

   Ülesanne osutus lahendajatele erakordselt raskeks. Neile lahendajatele, kes tulid idee peale vaadata 7-ga jagamisel tekkivaid jääke, ei osutunud edasine ülesanne enam kuigi keeruliseks. Paljud proovisid teha erinevaid avaldiste teisendusi, mis kahjuks ei vii sihile ning tihtipeale olid ka ebakorrektsed.

3. *(Hannes Jukk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Ülesanne lahendatud erijuhul: 1 p
   - Õigesti leitud seos $A = G = 1{,}5L$ algebra, geomeetria ja loogika küsimuste arvude vahel, edasine lahendus puudub: 2 p
   - Eksitud algebra (geomeetria) ja loogika küsimuste arvude vahelise seose avaldamisel: $0{,}18L = 0{,}12A \Rightarrow A = 1{,}5L$. Muu lahendus läbi viidud korrektselt: 5 p
   - Eksitud teksti lugemisel – tekstist sai leida seose algebra ja loogika küsimuste arvude vahel, kuid õpilane koostas seose algebra ja geomeetria ülesannete arvude kohta. Muu lahendus läbi viidud korrektselt: 5 p

Väga palju oli täislahendusi. Mitmel õpilasel oli kahjuks probleeme võrdest tundmatu avaldamisega, nt $0{,}18L = 0{,}12A \Rightarrow A = 1{,}5L$.

4. *(Indrek Zolk)* Igale lahendusele anti punkte ainult ühe järgneva skeemi kohaselt. Selle skeemi piires lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Hindamisskeem 1.

   - Antud võrduse vaatlemine ruutvõrrandina x suhtes ja selle ruutvõrrandi diskriminandi leidmine: 4 p
   - Tähelepanek, et peab kehtima $D \geqslant 0$, ning järeldus, et $y = 3$: 2 p
   - Leidmine, et $x = -3$: 1 p

   Hindamisskeem 2.

   - Sedastamine, et $x + 3$ ja $y - 3$ on sama märgiga või mõlemad nullid: 1 p
   - Seose $(x + 3)^2 = (3 - y)(x + y)$ saamine: 2 p
   - Avaldiste $x + 3$ ja $y - 3$ ning $3 - y$ ja $x + y$ samamärgilisusest vastuolude tuletamine: 3 p
   - Lõppvastuse saamine: 1 p

   Tööd, kus oli saadud ainult vastus või vastusele lisaks toodud põhjendused olid mittekehtivad, said 1 punkti.

   Sihitute algebraliste teisenduste eest punkte ei antud.

   Suur hulk lahendajaid oli leidnud ainult sobiva arvupaari $(-3, 3)$, suutmata põhjendada, miks see on ainus. Täielike või peaaegu täielike lahenduste seas leidus nii mõlemat žürii poolt pakutud lahendust kui ka alternatiivne lahendusidee, mis on lühidalt jälgitav hindamisskeemis 2.

5. *(Uve Nummert)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Põhimõtteliselt vale lahendus, midagi õiges suunas edasiviivat ei ole tehtud: 0 p
   - Põhimõtteliselt vale lahendus, kuid esineb selgesti kirjapanduna mingi õige idee: 1 p
   - Olulised arvutusvead või vaatlemata jäetud juhud põhimõtteliselt õiges lahenduses: 2–4 p
   - Viga nulliga algavate arvude mahaarvestamisel, muidu korrektne lahendus: 5 p
   - Põhjendused ebapiisavad, muidu korrektne lahendus: 6 p
   - Korrektne lahendus: 7 p

Paljud lahendajad väitsid, et 0 ei ole ei paaris ega paaritu. Kui seda eeldust oli järjekindlalt rakendatud nii arvu kui ka numbri 0 korral ja ülesanne sel eeldusel korrektselt lahendatud (vastuseks tuli siis 960), siis sai 4 punkti; kui seejuures vaadeldi ainult numbrit 0 üldse mitte sisaldavaid arve (vastuseks tuli siis 240), siis sai 3 punkti.

Lahendused, kus paaris- ja paarituid numbreid loendati avaldises kujul $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \cdot 1$, $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \cdot 1$ vms, said maksimaalselt 1 punkti.

10. klass

1. *(Jekaterina Prostakova, Anton Stalnuhhin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Osalised lahendused: 2 p
   - Ülesande lahenduse idee ja skeem on õiged, kuid viga pindalade arvutamisel: 4 p
   - Pindalad on leitud õigesti, kuid võrdlemise idee on vale: 5 p
   - Pindalad on leitud õigesti, võrdlemise idee on õige, kuid kasutatakse ligikaudseid hinnanguid: 6 p
   - Täiesti korrektne lahendus: 7 p

2. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Sisuline lahendus puudub: 0 p
   - Lahendust on ainult alustatud: 1 p
   - Lahendust on alustatud ja idee edasiseks on arusaadav: 2 p
   - Ainult näidatud, et $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$: 3 p
   - Näidatud, et $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$, ning edasine idee on arusaadav: 4 p
   - Korrektne tõestus: 7 p

3. *(Konstantin Tretjakov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Arvu esimese ja viimase numbri (a ja d) vahekorra uurimine: 1 p
   - Sobivate paaride (a, d) arvu leidmine: 1 p
   - Arvu keskmiste numbrite vahekorra uurimine ($\overline{bc}$ jagub 7-ga): 2 p
   - Sobivate paaride (b, c) arvu leidmine: 1 p
   - Õige vastus: 2 p

Kui oli otsitud ainult kujul $\overline{abca}$ olevate arvude arvu ja see ka õigesti leitud, sai 2 punkti.

4. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Idee esitada kuupjuure alune arv mingi avaldise kuubina: 1 p
   - Sulgude avamisest korrektse võrrandisüsteemi saamine: 2 p
   - Võrrandisüsteemi lahendamine ja lõppvastuse leidmine: 4 p

5. *(Emilia Käsper)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Näitamine, kuidas üheksa ruudu korral ruudustik sobivalt katta: 2 p
   - Tõestus, et ülejäänud ruutude korral pole võimalik ruudustikku sobivalt katta: 5 p

11. klass

1. *(Martin Pettai)* Igale lahendusele anti punkte ainult ühe järgneva skeemi kohaselt. Selle skeemi piires lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Hindamisskeem 1 (žürii lahendus 1).

   - Mõlema võrrandi ruutu tõstmine: 2 p
   - Saadud võrrandite kokkuliitmine: 1 p
   - Võrduse $\sin x \cos y + \cos x \sin y$ saamine: 1 p
   - Võrduse $\sin(x+y) = 0$ saamine: 1 p
   - Seose $x + y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ saamine: 1 p
   - Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

   Hindamisskeem 2 (žürii lahendus 3).

   - Seose $\cos \frac{x-y}{2}\left(\sin \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x+y}{2}\right) = 0$ saamine: 2 p
   - Juhu $\cos \frac{x-y}{2} = 0$ uurimine: 2 p

     Sealhulgas:

     - seose $\frac{x-y}{2} = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}$ saamine: *1 p*
     - võrduse $\cos 2x = \cos 2y$ järeldamine: *1 p*

- Juhu $\sin\dfrac{x+y}{2}+\cos\dfrac{x+y}{2}=0$ uurimine: 3 p

  Sealhulgas:

  - seose $\tan\dfrac{x+y}{2}=-1$ saamine: *1 p*
  - seose $\dfrac{x+y}{2}=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$ saamine: *1 p*
  - vastuolu saamine: *1 p*

Hindamisskeem 3.

- Mõlema võrrandi ruututõstmine: 2 p
- Seose $\cos 2y-\cos 2x+2\sin(x-y)=0$ saamine: 2 p
- Võrduse $\sin(x-y)=0$ tõestamine: 3 p

2. *(Oleg Košik)* Igale lahendusele anti punkte ainult ühe järgneva skeemi kohaselt. Selle skeemi piires lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Lahendus induktsiooniga.

   - Näitamine, et $2ab$ jagub n^2-ga: 2 p
   - Põhjendamine, miks ka ab jagub n^2-ga: 3 p
   - Induktsiooniga näitamine, et ülesande väide kehtib: 2 p

   Lahendus, kus leitakse, et nii a kui ka b jaguvad n-ga.

   - Näitamine, et $2ab$ jagub n^2-ga 2 p
   - Järeldamine, et nii a kui ka b jaguvad n-ga: 4 p
   - Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

3. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Ülesande a-osa: 3 p
   - Ülesande b-osa: 4 p

   Ülesande a-osa oli enamasti lahendatud hästi, kuid b-osas kaotati tihti punkte, sest arutlused ei olnud küllalt ammendavad või tehti põhjendamata eeldusi. Norida võiks ka 7 punkti saanute arutluste kallal, aga leidsin, et kooliõpilaselt ei saagi niisuguses ülesandes päris laitmatu detailse lahenduse kirjutamist nõuda.

4. *(Oleg Petšonkin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

   - Muidu õige lahendus, aga valesti selgitatud, miks KL ja BO on risti: 5 p
   - Õige ja täielik lahendus: 7 p

5. *(Kalle Kaarli)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Tuletatud ainult seos $2^{2^n-1}-7$ ja $2^{2^{n+1}-1}-7$ vahel: 1 p
- Põhimõtteliselt õige, kuid halvasti vormistatud lahendus: 6 p
- Igati korrektne lahendus: 7 p

12. klass

1. *(Ahti Peder)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Sümmeetriliste augukombinatsioonide arvu leidmine: 3 p
   - Tähelepanek, et igale mittesümmeetrilisele augukombinatsioonile vastav pilet sobib ka mingile teisele temast erinevale augukombinatsioonile: 1 p
   - Erinevate mittesümmeetriliste augukombinatsioonide arvu leidmine: 1 p
   - Õige vastus: 2 p

   Enamusele lahendajatest osutus ülesanne lihtsaks. Mõned lahendajad eksisid sümmeetriliste augukombinatsioonide kokkulugemisel.

2. *(Jan Villemson)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Tõestus, et paaritu n korral peab ülesande tingimustele vastav punkt asuma hulknurga sees: 3 p
   - Tõestus, et hulknurga sees leidub ülimalt üks ülesande tingimustele vastav punkt: 4 p

   Mitmes lahenduses kasutati väidet, et kõik punktid, millest antud lõik on näha antud nurga alt, asuvad ühel ringjoone kaarel. Niisugune väide pole õige, tegelikult moodustavad sellised punktid kahe kaare ühendi. Kui ülesande lahendus sellest väitest sõltus, võeti 1 punkt maha.

   Teine sage juht, kus muidu täielikust lahendusest 1 punkt kaduma läks, oli niisugune, kus lahendaja polnud põhjendanud, miks kahe erineva ülesande tingimustele vastava hulknurga sisepiirkonnas paikneva punkti korral peavad vastavad moodustuvad nurgad olema samad.

3. *(Mart Abel)* Seda ülesannet lahendati nii traditsiooniliste matemaatiliste vahenditega kui ka füüsikalise arutlusega (vaadeldes nöörile mõjuvaid jõude). Tüüpiliste lahenduste eest anti kummalgi juhul punkte järgmiselt.

   Matemaatiline lahendus.

- Ainult märgitud, et nurgad BDO ja BCO on täisnurgad: 1 p
- Leitud nurk, mille korral lõik AB on pikim: 3 p
- Muidu õige lahendus, kuid on näitamata, et $\frac{\pi}{3}$ on maksimumkoht: 6 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Füüsikaline lahendus.

- Toodud sisse sõlmepunktis mõjuvad jõud ning märgitud, et nende jõudude summa on 0: 3 p
- Toodud sisse sõlmepunktis mõjuvad jõud ning märgitud, et need jõud on kõik moodulilt võrdsed: 3 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Tulemust mitte mõjutavate arvutusvigade eest võeti maha 1 punkt.

4. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Ülesande a-osa: 2 p

     Sealhulgas:

     - põhjendus, et sellest, et jada ei ole perioodiline mooduli n järgi, järeldub, et ta ei ole perioodiline ka mooduli kn järgi mistahes positiivse täisarvu k korral: *1 p*
     - selle asjaolu kasutamine a-osa väide tõestamiseks: *1 p*

   - Ülesande b-osa: 5 p

     Sealhulgas:

     - sobiva jada leidmine: *1 p*
     - tõestus, et see jada ei ole perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi: *2 p*
     - tõestus, et see jada on perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi: *2 p*

   Kui tõestuse mingis osas esines viga või puudus, siis sai selle osa eest 1 punkti vähem.

5. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Konstruktsioon, kuidas krümblitega täita kuupi küljepikkusega 10: 2 p
   - Tõestus, et kuupi, mille küljepikkus ei jagu arvuga 5, ei ole võimalik krümblitega täita: 1 p

- Tõestus, et kuupi küljepikkusega 5 ei ole võimalik krümblitega täita: 4 p

Osad õpilased arvasid, et $5 \times 5 \times 5$ kuubi alumist kihti ei õnnestu krümblite abil täita. Paraku ei ole see ega ka mitmed analoogilised väited tõesed, ning seetõttu ei saa ka selle abil tõestada, et kuupi küljepikkusega 5 krümblitega täita ei saa.