Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab hüpotenuusi kaheks lõiguks, mille pikkuste suhe on $9:1$, ning vaadeldava kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mille pindalade vahe on $48\ \mathrm{cm}^2$. Leia esialgse kolmnurga kaatetite pikkused.

2. Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõesta, et $a^2+b^2+c^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui $a^4+b^4+c^4$ jagub 7-ga.

3. Rein lahendas matemaatika testi, mis koosnes algebra-, geomeetria- ja loogikaküsimustest. Pärast tulemuste kontrollimist selgus, et algebraküsimustest oli Rein vastanud õigesti 50%, geomeetriaküsimustest 70% ja loogikaküsimustest 80%. Algebra- ja loogikaküsimustest kokku oli Rein õigesti vastanud 62%, geomeetria- ja loogikaküsimustest kokku aga 74%. Mitmele protsendile testi kõikidest küsimustest vastas Rein õigesti?

4. Leia kõik reaalarvude paarid (x, y), mis rahuldavad võrdust
$$(x+y)^2 = (x+3)(y-3).$$

5. Kui palju leidub selliseid 10000-st väiksemaid positiivseid täisarve, mille kümnendesituses on paarisarv paarisnumbreid ja paaritu arv paarituid numbreid? (Eeldame, et ükski arv ei alga nulliga.)

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

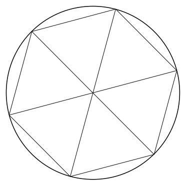
LÕPPVOOR

5. märts 2005

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Seitse venda ostsid ümmarguse pitsa ja lõikasid selle 12 tükiks nii, nagu joonisel näidatud. Kuuest vanemast vennast igaüks võttis endale ühe võrdkülgse kolmnurga kujulise tüki; ülejäänud 6 servatükki, mida vanemad vennad ei tahtnud, anti noorimale vennale. Kas noorim vend sai rohkem või vähem pitsat kui tema iga vanem vend?

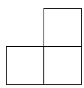


2. Olgu a, b ja c sellised reaalarvud, et
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$
Tõesta, et
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

3. Kui palju leidub selliseid neljakohalisi 7-ga jaguvaid naturaalarve, mille esimese ja viimase numbri vahetamisel saame samuti neljakohalise 7-ga jaguva arvu?

4. Vii avaldis
$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}$$
kujule, kus lubatavateks teheteks on ainult liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja ruutjuure leidmine.

5. Ruudustik mõõtmetega 5×5 kaetakse kaheksa nurgikuga (kolmest ühikruudust koosnev kujund joonisel) nii, et üks ruut jääb vabaks. Tee kindlaks kõik ruudustiku ruudud, mis võivad pärast katmist vabaks jääda.



Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

LÕPPVOOR

5. märts 2005

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Reaalarvud x ja y rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = -1. \end{cases}$$

   Tõesta, et $\cos 2x = \cos 2y$.

2. Täisarvud a, b ja n on sellised, et arv $a+b$ jagub arvuga n ning arv a^2+b^2 jagub arvuga n^2. Tõesta, et arv a^m+b^m jagub arvuga n^m suvalise positiivse täisarvu m korral.

3. Riigi postiteenistus kasutab postisaadetiste transpordiks kullereid, kellest igaühe ülesandeks on toimetada posti mingist linnast selle mingisse naaberlinna. On teada, et igast linnast on võimalik posti saata pealinna P. Suvalise kahe linna A ja B korral nimetame linna B *tähtsamaks* linnast A, kui saadetise iga võimalik tee linnast A pealinna P läbib kindlasti linna B.

   a) Tõesta, et alati, kui mingi kolme erineva linna A, B ja C korral on B tähtsam A-st ja C tähtsam B-st, siis on ka C tähtsam A-st.

   b) Tõesta, et alati, kui mingi kolme erineva linna A, B ja C korral on B ja C mõlemad tähtsamad A-st, siis on C tähtsam B-st või B tähtsam C-st.

4. Tasandil on antud kumer nelinurk $ABCD$. Olgu tasandi mingi punkti O korral K, L, M ja N vastavalt kolmnurkade AOB, BOC, COD ja DOA ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et tasandil leidub täpselt üks punkt O, mille puhul nelinurk $KLMN$ on rööpkülik.

5. Kas leidub selline täisarv $n > 1$, et arv

$$2^{2^n-1} - 7$$

   ei ole ühegi täisarvu ruut?

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

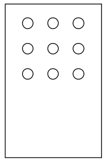
LÕPPVOOR

5. märts 2005

XII klass

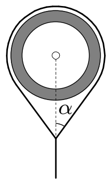
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Bussifirma busside piletikomposter lööb piletisse alati täpselt kuus auku. Aukude võimalikud asukohad paiknevad 3×3 tabelina, nagu näidatud joonisel. Hr. Jänes soovib hankida endale sellise piletite komplekti, et kompostri aukude ükskõik millise kombinatsiooni korral oleks tal olemas sama kombinatsiooniga pilet. Piletit võib vaadata nii eest- kui tagantpoolt. Leia vähim võimalik piletite arv niisuguses komplektis.



2. Tasandil on antud kumer n-nurk, kusjuures n on paaritu. Tõesta, et kui tasandil leidub punkt, millest vaadates kõik selle n-nurga küljed paistavad sama nurga all, siis see punkt on ainus. (Ütleme, et lõik AB paistab punktist O nurga γ all, kui $\angle AOB = \gamma$.)

3. Nöör, mille ühes otsas on väike silmus, pannakse üle horisontaalse toru nii, et otsad jäävad rippu. Teine ots pistetakse läbi silmuse, tõmmatakse torust eemale nii kaugele kui võimalik ja fikseeritakse selles asendis, kusjuures nöör ulatub endiselt silmusest läbi. Leia nurk α, mille võrra pöördub nööri käigusuund silmuse läbimisel.



4. Naturaalarvude jada a_1, a_2, a_3, … nimetatakse *perioodiliseks mooduli n järgi*, kui leidub selline positiivne täisarv k, et iga positiivse täisarvu i korral annavad liikmed a_i ja a_{i+k} arvuga n jagades sama jäägi. Kas leidub kasvav naturaalarvude jada, mis
   a) ei ole perioodiline lõpliku positiivse arvu naturaalarvuliste moodulite järgi ja on perioodiline kõigi ülejäänud naturaalarvuliste moodulite järgi;
   b) ei ole perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi ja on perioodiline lõpmatu arvu naturaalarvuliste moodulite järgi?

5. *Krümbel* on joonisel näidatud ruumiline kujund, mis koosneb neljast valgest ja ühest mustast ühikkuubist. Leia vähim kuubi küljepikkus, mille korral on kuupi võimalik täpselt krümblitega täita.