LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все пары (x, y) действительных чисел, для которых

$$\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}\ .$$

2. Все положительные разности $a_i - a_j$ пяти разнличных положительных целых чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (таких разностей всего 10) различны. Найти наименьшее возможное значение наибольшего из чисел a_i.

3. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ берут соответственно точки M и N так, что каждый из отрезков AN и CM делит четырехугольник $ABCD$ на две равные по площади части. Доказать, что отрезки MN и AC параллельны.

4. Доказать, что число $n^n - n$ делится на 24 при любом нечетном натуральном числе n.

5. Три различные окружности одинакового радиуса пересекаются в точке Q. Окружность $\mathcal{C}$ касается их всех. Доказать, что Q является центром окружности $\mathcal{C}$.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие тройки (x, y, z) положительных целых чисел, для которых $x < y < z$, $\text{НОД}\,(x, y) = 6$, $\text{НОД}\,(y, z) = 10$, $\text{НОД}\,(z, x) = 8$ и $\text{НОК}\,(x, y, z) = 2400$.

2. На сторонах BC и AB параллелограмма $ABCD$ берут соответственно точки M и N так, что $|AM| = |CN|$. Пусть P точка пересечения отрезков AM и CN. Доказать, что биссектриса угла APC проходит через вершину D.

3. Учитель написал на доске число, состоящее из некоторого количества цифр 4 и такого же количества следующих за ними цифр 8. В этот момент прозвенел звонок. На перемене Коля подошел к доске и приписал в начале числа еще одну цифру 4, а в конце числа цифру 9. Доказать, что полученное число является квадратом некоторого целого числа.

4. В начале в точке $(0, 0)$ написано число 1, а во всех других точках плоскости, имеющих целочисленные координаты, написано число 0. Каждую секунду все эти числа изменяют, записывая в каждой точке плоскости с целочисленными координатами сумму чисел, находившихся в предыдущую секунду в четырех соседних к ней точках. Найти сумму чисел, находяшихся во всех точках с целочисленными координатами, через n секунд.

5. Действительные числа a, b и c удовлетворяют равенствам $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ и $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Найти значение суммы $a + b + c$.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие пары $(a,\, b)$ целых чисел, что $a^2 + ab + b^2 = 1$.

2. Через выбранную на биссектрисе угла AOB точку M проводят прямую, которая пересекает стороны угла OA и OB соответственно в точках K и L. Доказать, что значение суммы $\dfrac{1}{|OK|} + \dfrac{1}{|OL|}$ не зависит от выбора прямой, проходящей через точку M, т.е. определено величиной угла AOB и выбором точки M на биссектрисе.

3. Из 25 точек плоскости, обе координаты которых являются целыми числами из множества $\{-2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2\}$, отмечают некоторые 17 точек. Доказать, что найдутся такие три отмеченные точки, что одна из них является серединой отрезка, соединяющего остальные две точки.

4. Найти все функции $f(x)$, которые определены для неотрицательных действительных чисел x, принимают неотрицательные действительные значения и при любых неотрицательных действительных числах x и y удовлетворяют условию
$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot \big(f(x) + f(y)\big)\,.$$

5. Алфавит языка BAU состоит из трех букв B, A и U. Известно, что начиная с любого n-буквенного слова языка BAU и повторно применяя следующие правила (1) и (2), получим все n-буквенные слова языка BAU и только они:
   (1) запишем все буквы слова в противоположном порядке;
   (2) заменим две расположенные рядом буквы: BA → UU, AU → BB, UB → AA, UU → BA, BB → AU или AA → UB.

   Если BBAUABAUUABAUUUABAUUUUABB является словом языка BAU, найдется ли в языке BAU слово
   а) BUABUABUABUABAUBAUBAUBAUB;
   б) ABUABUABUABUAUBAUBAUBAUBA?

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Внутри круга берут точку K так, что проведенный из точки K через центр окружности O луч и перпендикулярная этому лучу хорда, проходящая через точку K, делят круг на три равные по площади части. Пусть L один конец рассматриваемой хорды. Выполняется ли неравенство $\angle KOL < 75^\circ$?

2. Альберт и Брита играют на полосе, состоящей из 19 стоящих в ряд клеток, в следующую игру. В начале на центральной клетке полосы находится одна фишка. На каждом ходу Альберт называет некоторое положительное целое число меньше 5-ти, а Брита передвигает фишку на соответствующее число клеток в выбранном ею направлении — при этом Брита не может передвигать фишку в одном направлении более двух раз подряд. Доказать, что Альберт может называть числа так, что не позже чем на 19-м ходу Брита будет вынуждена выйти фишкой за пределы полосы.

3. Пусть K, L и M — основания высот, проведенных соответственно из вершин A, B и C треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ тогда и только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

4. Пусть a, b и c такие положительные действительные числа, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доказать, что выполняется неравенство
$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant 1\ .$$

5. Пусть n и c взаимно простые положительные целые числа. Для любого целого числа i обозначим через i' остаток, возникающий при делении произведения ci на n. Пусть $A_0A_1\dots A_{n-1}$ правильный n-угольник. Доказать, что
   а) если отрезки A_iA_j и A_kA_l параллельны, то отрезки $A_{i'}A_{j'}$ и $A_{k'}A_{l'}$ также параллельны;
   б) если отрезки A_iA_j и A_kA_l перпендикулярны, то отрезки $A_{i'}A_{j'}$ и $A_{k'}A_{l'}$ также перпендикулярны.