Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* $x = -3$, $y = 2$.
   Korrutades antud võrduse kõik liikmed läbi teguriga xy, saame

   $$(x+6)\cdot x + 13 = (4-y)\cdot y$$

   ehk

   $$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 13 = 0\ .$$

   Paneme tähele, et vasaku poole saab siin esitada ruutude summana:

   $$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 0\ ,$$

   kust $x+3=0$ ja $y-2=0$, ehk $x=-3$ ja $y=2$.

2. *Vastus:* 12.
   Lahendus 1. Olgu vaadeldavad arvud $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Kuna 10 positiivset vahet $a_i - a_j$ on kõik erinevad, siis suurim neist vahedest $a_5 - a_1$ peab olema vähemalt 10, kust $a_5 \geqslant 11$. Kui aga oleks $a_5 = 11$, siis peaksid need vahed olema parajasti 1, 2, ..., 10 ning peaks kehtima võrdus

   $$\begin{aligned}(a_5-a_4)+(a_5-a_3)+(a_5-a_2)+(a_5-a_1)&+\\ +(a_4-a_3)+(a_4-a_2)+(a_4-a_1)&+\\ +(a_3-a_2)+(a_3-a_1)&+\\ +(a_2-a_1)&=\\ =4a_5+2a_4-2a_2-4a_1=1+2+\ldots+10=55\ .\end{aligned}$$

   See ei ole aga võimalik, sest $4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1$ on paarisarv.

Niisiis peab suurim antud arvudest olema vähemalt 12. Sobivateks arvudeks on näiteks 1, 3, 8, 11, 12 (vaadeldavad vahed on siis $1 = 12 - 11$, $2 = 3 - 1$, $3 = 11 - 8$, $4 = 12 - 8$, $5 = 8 - 3$, $7 = 8 - 1$, $8 = 11 - 3$, $9 = 12 - 3$, $10 = 11 - 1$ ja $11 = 12 - 1$).

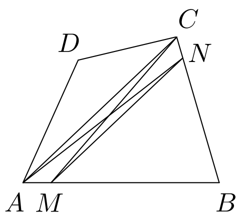
Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses veendume, et 12 jaoks on sobiv näide olemas, ning paneme tähele, et kui suurim arvudest a_i on 11, siis peavad vaadeldavad vahed olema $1, 2, \ldots, 10$. Järelikult sel juhul neist vahedest täpselt 5 on paaritud. Olgu arvude a_i seas x paaritut ja y paarisarvu. Kahe arvu vahe on paaritu parajasti siis, kui need arvud on erineva paarsusega, s.t. üks neist on paaritu ja teine paaris. Kuna paaritu arvu valikuks on x võimalust ning iga valitud paaritu arvu korral on paarisarvu valikuks y võimalust, on erineva paarsusega arvude paari valikuks täpselt xy võimalust. Seega on ka antud arvude paarituid vahesid kokku parajasti xy ning x ja y peavad järelikult rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases},$$

millel aga puuduvad naturaalarvulised lahendid.

3. Vastavalt konstruktsioonile on punktid M ja N diagonaaliga AC määratud sirgest ühel ja samal pool (vt. joonist 1). Seega piisab tõestada, et nad on sirgest AC võrdsel kaugusel, s.t. kolmnurkade AMC ja ANC tippudest M ja N tõmmatud kõrgused on võrdsed. Selleks näitame, et kolmnurkade AMC ja ANC pindalad on võrdsed. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} S_{AMC} &= S_{ABC} - S_{MBC} = S_{ABC} - \frac{1}{2} S_{ABCD} = \\ &= S_{ABC} - S_{ABN} = S_{ANC} \,. \end{aligned}$$



Joonis 1

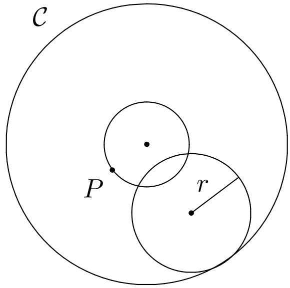
4. Olgu $n = 2k+1$, siis $n^n - n = n^{2k+1} - n = n(n^{2k}-1)$. Näitame, et korrutis $n(n^{2k}-1)$ jagub mistahes paaritu arvu n korral 8-ga ja 3-ga.

   Paneme tähele, et $n^{2k}-1 = (n^k-1)(n^k+1)$ ning kuna n on paaritu, siis n^k-1 ja n^k+1 on kaks järjestikust paarisarvu. Üks neist arvudest jagub niisiis kindlasti 4-ga ning nende korrutis $n^{2k}-1$ jagub 8-ga.

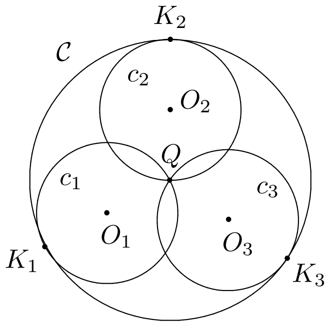
   Kui n jagub 3-ga, siis ilmselt ka $n(n^{2k}-1)$ jagub 3-ga. Kui n ei jagu 3-ga, siis n^k ei jagu 3-ga ning üks arvudest n^k-1 ja n^k+1 jagub 3-ga, mistõttu sel juhul $n^{2k}-1 = (n^k-1)(n^k+1)$ jagub 3-ga.

5. *Lahendus 1.* Vaatleme ringjoone $\mathcal{C}$ sees suvalist punkti P, mis ei ole selle ringjoone keskpunkt. Näitame, et fikseeritud raadiuse r korral leiduvad ülimalt kaks ringjoont raadiusega r, mis puutuvad ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt ja läbivad punkti P. Selleks veeretame ringjoont raadiusega r seespool mööda ringjoont $\mathcal{C}$; ilmselt läbib veeretatav ringjoon punkti P mitte rohkem kui kahes asendis (ehk samaväärselt: mistahes ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt puutuval fikseeritud ringjoonel on ülimalt kaks ühist punkti sellise ringjoonega, mille keskpunkt on ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunktis ja mis läbib punkti P — vt. joonist 2). Seega ei saa ükski niisugune punkt P olla kolme erineva võrdse raadiusega ringjoone lõikepunktiks, mis kõik puutuvad ringjoont $\mathcal{C}$.

   Märkus. Ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt sobib punkti Q rolli, sest mistahes ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt puutuv ringjoon, mille raadius on pool ringjoone $\mathcal{C}$ raadiusest, läbib ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkti ning võime valida suvalised kolm sellist ringjoont.



Joonis 2



Joonis 3

Lahendus 2. Olgu väiksemad ringjooned c_1, c_2 ja c_3 keskpunktidega O_1, O_2 ja O_3 ning olgu K_1, K_2 ja K_3 vastavalt nende puutepunktid ringjoonega $\mathcal{C}$ (vt. joonist 3). Olgu ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt O. Iga $i = 1, 2, 3$ korral asuvad punktid K_i, O_i ja O ühel sirgel (sest ringjoontel c_i ja $\mathcal{C}$ on punktis K_i ühine puutuja, mis on risti nende raadiustega K_iO_i ja K_iO). Et ilmselt $|OK_1| = |OK_2| = |OK_3|$ ning ringjoonte c_i raadiuste võrdsuse tõttu $|O_1K_1| = |O_2K_2| = |O_3K_3|$, siis $|O_1O| = |O_2O| = |O_3O|$. Samas aga ringjoonte c_i raadiuste võrdsuse tõttu ka $|O_1Q| = |O_2Q| = |O_3Q|$. Seega punktid O ja Q langevad kokku (kumbki neist on kolmnurga $O_1O_2O_3$ ümberringjoone keskpunkt).

Lahendus 3. Olgu väiksemate ringjoonte c_1, c_2 ja c_3 ühine raadius r. Vaatleme ringjoont $\mathcal{C}_1$, mille keskpunkt on väiksemate ringjoonte ühises punktis Q ning raadius on $2r$. Et iga väiksema ringjoone c_i punktist Q kaugeim punkt K_i on selle ringjoone punktist Q tõmmatud diameetri teine otspunkt, siis asuvad need punktid K_i punktist Q parajasti kaugusel $2r$, s.t. ringjoon $\mathcal{C}$ puutub iga ringjoont c_i vastavas punktis K_i. Et kõiki kolme ringjoont c_1, c_2 ja c_3 puutuvaid ringjooni saab olla ülimalt üks, siis $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, s.t. Q on ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt.

X klass

1. *Vastus:* (24, 30, 800) ja (24, 150, 160).

   Lahendus 1. Et arv x jagub nii 6-ga kui 8-ga, siis ta jagub arvuga $\text{VÜK}(6,8) = 24$. Analoogiliselt y jagub arvuga $\text{VÜK}(6,10) = 30$ ning z jagub arvuga $\text{VÜK}(10,8) = 40$. Seega leiduvad sellised positiivsed täisarvud x', y', z', et $x = 24x'$, $y = 30y'$ ja $z = 40z'$, ning

$$\begin{aligned} 6 &= \text{SÜT}(x,y) = \text{SÜT}(24x',30y') = 6\cdot\text{SÜT}(4x',5y')\,, \\ 10 &= \text{SÜT}(y,z) = \text{SÜT}(30y',40z') = 10\cdot\text{SÜT}(3y',4z')\,, \\ 8 &= \text{SÜT}(z,x) = \text{SÜT}(40z',24x') = 8\cdot\text{SÜT}(5z',3x')\,. \end{aligned}$$

   Neist võrdustest järeldub, et $\text{SÜT}(4x',5y') = 1$, $\text{SÜT}(3y',4z') = 1$ ja $\text{SÜT}(5z',3x') = 1$. Siit näeme, et arvud x', y', z' on paarikaupa ühistegurita ning $\text{SÜT}(x',5) = 1$, $\text{SÜT}(y',4) = 1$ ja $\text{SÜT}(z',3) = 1$. Näitame nüüd, et $\text{VÜK}(24x',30y',40z') = \text{VÜK}(120x',120y',120z')$. Selleks veendume, et võrduse kumbki pool jagub teisega. Võrduse parem pool ilmselt jagub vasakuga — kuna parem pool jagub arvudega

$120x'$, $120y'$, $120z'$, siis ammugi jagub ta arvudega $24x'$, $30y'$, $40z'$ ning järelikult ka viimaste vähima ühiskordsega. Näitame nüüd, et vasak pool jagub arvudega $120x'$, $120y'$, $120z'$ ning järelikult ka arvuga $\text{VÜK}\,(120x', 120y', 120z')$. Tõepoolest, vasak pool jagub arvudega $24x'$ ja 5 ning kuna $\text{SÜT}\,(x', 5) = 1$, siis ka $\text{SÜT}\,(24x', 5) = 1$ ning vasak pool jagub arvuga $24x' \cdot 5 = 120x'$. Analoogiliselt näitame, et vasak pool jagub ka arvudega $120y'$ ja $120z'$. Nüüd saame

$$\begin{aligned} 2400 &= \text{VÜK}\,(x, y, z) = \text{VÜK}\,(24x', 30y', 40z') = \\ &= \text{VÜK}\,(120x', 120y', 120z') = 120 \cdot \text{VÜK}\,(x', y', z') = \\ &= 120 \cdot x'y'z', \end{aligned}$$

kus viimane võrdus tuleneb sellest, et arvud x', y', z' on paarikaupa ühistegurita. Järelikult $x'y'z' = 20$ ning kuna x', y' ja z' on paarikaupa ühistegurita, siis nende väärtusteks saavad olla mingis järjekorras arvud 1, 1, 20 või arvud 1, 4, 5. Et aga arvude $x = 24x'$, $y = 30y'$ ja $z = 40z'$ jaoks kehtiks tingimus $x < y < z$, siis peab esimesel juhul olema $x' = 1$, $y' = 1$ ja $z' = 20$, teisel juhul aga on kaks võimalust: $x' = 1$, $y' = 4$, $z' = 5$ või $x' = 1$, $y' = 5$, $z' = 4$. Neile võimalustele vastavad arvukolmikud (x, y, z) on vastavalt $(24, 30, 800)$, $(24, 120, 200)$ ja $(24, 150, 160)$. Vahetu kontroll näitab, et esimene ja kolmas arvukolmik rahuldavad ülesande tingimusi, teine kolmik aga ei sobi, sest arvude $y = 120$ ja $z = 200$ suurim ühistegur on siin 10 asemel 40.

Lahendus 2. Olgu d kolme arvu x, y, z suurim ühistegur. Siis neist arvudest mistahes paari suurim ühistegur jagub d-ga, seega $\text{SÜT}\,(x, y) = d \cdot p$, $\text{SÜT}\,(y, z) = d \cdot q$ ja $\text{SÜT}\,(z, x) = d \cdot r$, kus p, q, r on mingid paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud (tõepoolest, kui nt. arvudel p ja q oleks ühine tegur $s > 1$, siis oleks $d \cdot s$ arvude x, y, z ühine tegur, mis oleks vastuolus d valikuga). Näitame, et arvud x, y, z esituvad kujul

$$x = d \cdot p \cdot r \cdot x'; \quad y = d \cdot p \cdot q \cdot y'; \quad z = d \cdot q \cdot r \cdot z',$$

kus x', y', z' on jällegi mingid paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud. Tõepoolest, kuna arv x jagub arvudega $d \cdot p$ ja $d \cdot r$, siis $\dfrac{x}{d}$ jagub ühistegurita arvudega p ja r ning seega jagub arvuga $p \cdot r$. Seega x jagub arvuga $d \cdot p \cdot r$, s.t. esitub kujul $x = d \cdot p \cdot r \cdot x'$; analoogiliselt saame esitada ka y ja z. Kui nüüd nt. arvudel x' ja y' oleks ühine tegur $t > 1$, siis oleks $d \cdot p \cdot t$ arvude x ja y ühine tegur, mis oleks vastuolus p valikuga.

Näitame nüüd, et $\text{VÜK}\,(x,y,z) = d \cdot pqr \cdot x'y'z'$. Tõepoolest, kuna $\text{SÜT}\,(x,y) = dp$, $x = dp \cdot rx'$ ja $y = dp \cdot qy'$, siis $\text{VÜK}\,(x,y) = = dp \cdot rx' \cdot qy' = dqr \cdot px'y'$. Kuna $\text{VÜK}\,(x,y,z)$ jagub arvudega $\text{VÜK}\,(x,y) = dqr \cdot px'y'$ ja $z = dqr \cdot z'$, siis $\dfrac{\text{VÜK}\,(x,y,z)}{dqr}$ jagub arvudega $px'y'$ ja z'. Seejuures $px'y'$ ja z' on ühistegurita — eespool näitasime, et x', y', z' on paarikaupa ühistegurita, ning kui arvudel p ja z' oleks ühine tegur $u > 1$, siis oleks $d \cdot u$ arvude x, y, z ühine tegur, mis oleks vastuolus d valikuga. Niisiis $\dfrac{\text{VÜK}\,(x,y,z)}{dqr}$ jagub korrutisega $px'y'z'$ ning $\text{VÜK}\,(x,y,z)$ jagub arvuga $dqr \cdot px'y'z' = d \cdot pqr \cdot x'y'z'$. Et samas $d \cdot pqr \cdot x'y'z'$ on arvude x, y ja z ühine kordne, siis $\text{VÜK}\,(x,y,z) = d \cdot pqr \cdot x'y'z'$.

Ülesande tingimustest saame, et $d = \text{SÜT}\,(6,\ 8,\ 10) = 2$ ning $p = 3$, $q = 5$ ja $r = 4$. Seega

$$\begin{aligned} \text{VÜK}\,(x,y,z) &= d \cdot pqr \cdot x'y'z' = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x'y'z' = 2400\ . \end{aligned}$$

Siit leiame, et $x'y'z' = 20$. Edasi arutleme samuti nagu esimeses lahenduses.

Lahendus 3. Tähistagu $p \triangleright a$ algarvu p astendajat arvu a esituses algarvude astmete korrutisena. Uurime kõigepealt algarvu 2 astendajaid: ülesande tingimustest saame

$$\begin{aligned} \min(2 \triangleright x, 2 \triangleright y) &= 2 \triangleright 6 = 1\ , &(1)\\ \min(2 \triangleright x, 2 \triangleright z) &= 2 \triangleright 8 = 3\ , &(2)\\ \max(2 \triangleright x, 2 \triangleright y, 2 \triangleright z) &= 2 \triangleright 2400 = 5\ . &(3) \end{aligned}$$

Võrdusest (2) saame, et $2 \triangleright z \geqslant 3$ ja $2 \triangleright x \geqslant 3$. Võrdusest (1) saame nüüd, et $2 \triangleright y = 1$, ning võrdustest (2) ja (3) leiame, et üks astendajaist $2 \triangleright x$ ja $2 \triangleright z$ peab olema 3 ja teine 5. Kokkuvõttes saime niisiis kaks võimalust:

$$\begin{cases} 2 \triangleright x = 3 \\ 2 \triangleright y = 1 \\ 2 \triangleright z = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2 \triangleright x = 5 \\ 2 \triangleright y = 1 \\ 2 \triangleright z = 3 \end{cases} . \tag{4}$$

Vaatleme nüüd algarvu 3 astendajaid:

$$\min(3 \triangleright x, 3 \triangleright y) = 3 \triangleright 6 = 1 , \tag{5}$$

$$\min(3 \triangleright x, 3 \triangleright z) = 3 \triangleright 8 = 0 , \tag{6}$$

$$\max(3 \triangleright x, 3 \triangleright y, 3 \triangleright z) = 3 \triangleright 2400 = 1 . \tag{7}$$

Võrdusest (5) ja (7) saame, et $3 \triangleright x = 3 \triangleright y = 1$, ning võrdusest (6), et $3 \triangleright z = 0$. Niisiis

$$\begin{cases} 3 \triangleright x = 1 \\ 3 \triangleright y = 1 \\ 3 \triangleright z = 0 \end{cases} . \tag{8}$$

Uurime lõpuks algarvu 5 astendajaid:

$$\min(5 \triangleright x, 5 \triangleright y) = 5 \triangleright 6 = 0 , \tag{9}$$

$$\min(5 \triangleright y, 5 \triangleright z) = 5 \triangleright 10 = 1 , \tag{10}$$

$$\max(5 \triangleright x, 5 \triangleright y, 5 \triangleright z) = 5 \triangleright 2400 = 2 . \tag{11}$$

Võrdusest (10) saame, et $5 \triangleright y \geqslant 1$ ja $5 \triangleright z \geqslant 1$. Võrdusest (9) saame nüüd, et $5 \triangleright x = 0$, ning võrdustest (10) ja (11) leiame, et üks astendajaist $5 \triangleright y$ ja $5 \triangleright z$ peab olema 1 ja teine 2. Kokkuvõttes saime jällegi kaks võimalust:

$$\begin{cases} 5 \triangleright x = 0 \\ 5 \triangleright y = 1 \\ 5 \triangleright z = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 5 \triangleright x = 0 \\ 5 \triangleright y = 2 \\ 5 \triangleright z = 1 \end{cases} . \tag{12}$$

Kuna arvude x, y, z vähim ühiskordne 2400 ülejäänud algarvudega ei jagu, ei jagu ka ükski arvudest x, y, z nendega. Tingimustest (4), (8) ja (12) saame nüüd kokku neli võimalust:

$$\begin{cases} x = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30 \\ z = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 800 \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150 \\ z = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 160 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} x = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 96 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30 \\ z = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 200 \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 96 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150 \\ z = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 40 \end{cases} .$$

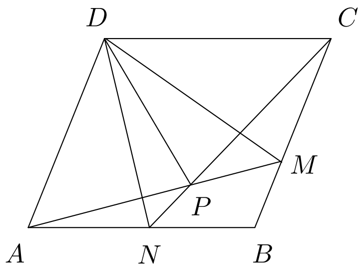
Kontroll näitab, et need kõik rahuldavad ülejäänud ülesande tingimusi peale selle, et $x < y < z$. Kuna $x < y < z$, siis jäävad järele kaks esimest võimalust.

2. Tõestamaks, et punkt paikneb nurgapoolitajal, piisab näidata, et see punkt on vaadeldava nurga haaradest võrdsel kaugusel. Niisiis on meil vaja näidata, et punkt D paikneb võrdsel kaugusel sirgetest AM ja CN (vt. joonist 4).

   Paneme tähele, et kolmnurkade AMD ja DNC pindalad on võrdsed:

   $$S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{DNC} ,$$

   sest kummagi kolmnurga aluseks on rööpküliku $ABCD$ külg ja kõrguseks sellele küljele tõmmatud rööpküliku kõrgus. Et nende kolmnurkade küljed AM ja CN on võrdse pikkusega, siis peavad olema võrdse pikkusega ka neile külgedele tipust D tõmmatud kõrgused. See aga tähendabki, et punkt D on sirgetest AM ja CN võrdsel kaugusel.



Joonis 4

3. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et $49 = 7^2$, $4489 = 67^2$, $444889 = 667^2$. Näitame, et

   $$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 .$$

   Tõepoolest, $6 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 = 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}8$ ning seega

   $$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 - 1 = \underbrace{66\ldots6}_{n} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}8 =$$
$$= \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} \ .$$

Lahendus 2. Tõestame induktsiooniga n järgi, et

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 = \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 \ .$$

Tõepoolest, $n = 1$ korral $7^2 = 49$. Eeldame nüüd, et $n-1$ jaoks väide kehtib, ning kontrollime, et see kehtib siis ka n korral:

$$\begin{aligned}
\underbrace{66\ldots6}_{n}7^2 &= (\underbrace{66\ldots6}_{n-1}70 - 3)^2 = \\
&= (10 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7 - 3)^2 = \\
&= 100 \cdot \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 - 60 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7 + 9 = \\
&= \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}909 - 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}20 = \\
&= \underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9 \ .
\end{aligned}$$

Lahendus 3. Olgu

$$x = \underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n} = \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) \ .$$

Siis $10^n = 9x + 1$ ning

$$\begin{aligned}
\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 &= \underbrace{44\ldots4}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{88\ldots8}_{n} + 1 = \\
&= 4x \cdot 10^n + 8x + 1 = \\
&= 4x(9x + 1) + 8x + 1 = \\
&= 36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2 \ .
\end{aligned}$$

Lahendus 4. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 &= \underbrace{44\ldots4}_{2n},(4) + \underbrace{44\ldots4}_{n},(4) + 0,(1) = \\ &= 10^{2n}\cdot\frac{4}{9} + 10^{n}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \\ &= \left(10^{n}\cdot\frac{2}{3}\right)^{2} + 2\cdot 10^{n}\cdot\frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \\ &= \left(10^{n}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{2}.\end{aligned}$$

Kuna $10^n \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10^n \cdot 2 + 1}{3}$ ning $10^n \cdot 2 + 1$ jagub 3-ga, siis on tegemist esitusega täisarvu ruuduna.

Lahendus 5. Korrutades arvu $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$ arvuga $3^2 = 9$, saame

$$9\cdot\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 = 2\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^2\,.$$

Seega $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \left(\dfrac{2\overbrace{00\ldots0}^{n-1}1}{3}\right)^2 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2.$

4. *Vastus:* 4^n.

   Alghetkel on kõigis tasandi täisarvuliste koordinaatidega punktides olevate arvude kogusumma $1 = 4^0$. Iga järgmise sekundi arvude kogusummasse annab eelmise sekundi iga arv x panuse $4x$, seega suureneb arvude kogusumma igal sammul 4 korda, andes n sekundi järel tulemuseks 4^n.

5. *Vastus:* 1.

   Kuna $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, siis $-1 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Sel juhul aga $a^2 \geqslant a^3$, $b^2 \geqslant b^3$ ja $c^2 \geqslant c^3$. Kuna $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$, siis peavad kõigis kolmes võrratuses tegelikult kehtima võrdused: $a^2 = a^3$, $b^2 = b^3$ ja $c^2 = c^3$. Järelikult a, b, c saavad olla vaid 0 või 1, ning võrduse $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ tõttu peavad täpselt kaks neist olema 0 ja kolmas 1.

Ülesande tingimusi rahuldavad seega kolmikud $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$; igal juhul saame $a+b+c=1$.

XI klass

1. *Vastus:* $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$.
Lahendus 1. Võrdus $a^2+ab+b^2=1$ on samaväärne sellega, et

$$2(a^2+ab+b^2)=a^2+b^2+(a+b)^2=2\ .$$

Seega peab üks arvudest a, b ja $a+b$ olema 0 ning kaks ülejäänut 1 või -1. Siit leiame kergesti kõik sobivad paarid $(a,\,b)$.

Lahendus 2. Et $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$, $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geqslant 0$, siis $|ab|\leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$. Võrdusest $a^2+ab+b^2=1$ saame nüüd, et $a^2+b^2\leqslant 2$, s.t. a ja b väärtused peavad olema hulgast $\{0,\,1,\,-1\}$. Edasi näeme, et kui $|a|=|b|=1$, siis peab olema $ab=-1$, s.t. $a=-b$, ning kui üks arvudest a,b on 0, siis teine peab olema 1 või -1. Neid tingimusi arvestades leiame kõik sobivad paarid.

Lahendus 3. Paneme tähele, et kui $a=b$, siis saame võrrandi $3a^2=1$, millel täisarvulised lahendid puuduvad. Seega igas sobivas paaris (a,b) peab olema $a\neq b$.
Lahutades antud võrduse mõlemast poolest ab, saame $a^2+b^2=1-ab$, millest $1-ab\geqslant 0$ ehk $ab\leqslant 1$. Liites antud võrduse mõlemale poole ab, saame $(a+b)^2=1+ab$, kust $ab\geqslant -1$. Niisiis $|ab|\leqslant 1$, s.t. a ja b väärtused peavad olema hulgast $\{0,\,1,\,-1\}$. Jääb üle kontrollida, et kõik sellised paarid $(a,\,b)$, kus täiendavalt $a\neq b$, ka sobivad.

Lahendus 4. Samuti nagu eelmises lahenduses leiame, et $a\neq b$. Korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga $a-b\neq 0$, saame niisiis samaväärse tingimuse

$$a^3-b^3=a-b\ .$$

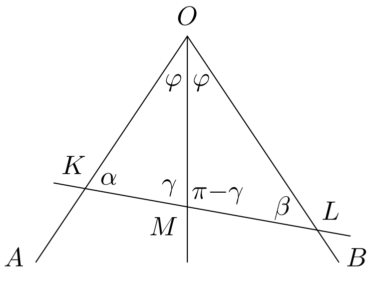
Selle võrduse saame kirjutada kujul $a^3-a=b^3-b$ ehk

$$a(a-1)(a+1)=b(b-1)(b+1)\ .$$

Tähistame $f(n) = n(n-1)(n+1)$, siis nõutav võrdus omandab kuju $f(a) = f(b)$. On ilmne, et piirkonnas $n > 1$ on f rangelt kasvav. Samuti näeme, et $f(-n) = -f(n)$, seega ka $n < -1$ korral on f rangelt kasvav ning piirkondades $n < -1$ ja $n > 1$ on f väärtused erineva märgiga. Kokkuvõttes on võrdus $f(a) = f(b)$ võimalik ainult siis, kui a ja b väärtused on mõlemad hulgast $\{0, 1, -1\}$. Teisalt, kõigil sellistel juhtudel tõepoolest $f(a) = 0 = f(b)$.

2. *Lahendus 1.* Tähistame $\angle KOM = \angle LOM = \varphi$, $\angle OKM = \alpha$, $\angle OLM = \beta$ ja $\angle OMK = \gamma$, siis $\angle OML = \pi - \gamma$ (vt. joonist 5). Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas OKM saame $\dfrac{|OK|}{\sin\gamma} = \dfrac{|OM|}{\sin\alpha}$, kust $\dfrac{1}{|OK|} = \dfrac{1}{|OM|} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Siinusteoreemist kolmnurgas OLM saame analoogiliselt, et $\dfrac{1}{|OL|} = \dfrac{1}{|OM|} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Niisiis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|OK|} + \frac{1}{|OL|} &= \frac{1}{|OM|} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \\
&= \frac{1}{|OM|} \cdot \frac{\sin(\varphi+\gamma) + \sin(\varphi+\pi-\gamma)}{\sin\gamma} = \\
&= \frac{1}{|OM|} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma}{\sin\gamma} = \\
&= \frac{1}{|OM|} \cdot 2\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$



Joonis 5

Näeme, et summa $\frac{1}{|OK|}+\frac{1}{|OL|}$ väärtus on üheselt määratud nurgaga $\varphi = \frac{\angle AOB}{2}$ ning punkti M kaugusega nurga tipust O, s.t. ei sõltu punkti M läbiva sirge KL valikust.

Lahendus 2. Tähistame nurgad samuti nagu eelmises lahenduses. Siinusteoreemist kolmnurgas OKL leiame, et

$$\frac{|OK|}{\sin\beta} = \frac{|OL|}{\sin\alpha} = \frac{|KL|}{\sin 2\varphi},$$

kust

$$\frac{1}{|OK|} + \frac{1}{|OL|} = \frac{1}{|KL|} \cdot \left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin\beta} + \frac{\sin 2\varphi}{\sin\alpha}\right).$$

Edasi saame siinusteoreemist kolmnurgas OKM, et

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{|KM|}{|OM|\sin\varphi},$$

ning kolmnurgas OLM analoogiliselt

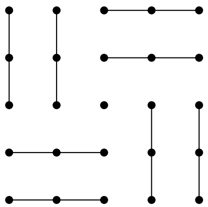
$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{|LM|}{|OM|\sin\varphi}.$$

Kokkuvõttes

$$\frac{1}{|OK|} + \frac{1}{|OL|} = \frac{|KM|+|LM|}{|KL|} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{|OM|\cdot\sin\varphi} = \frac{2\cos\varphi}{|OM|}.$$

3. *Lahendus 1.* Kui punkt $(0,0)$ on märgitud, siis paneme tähele, et ülejäänud punktid jagunevad 12 paariks, kus iga paari punktid on punkti $(0,0)$ suhtes sümmeetrilised, s.t. $(0,0)$ on neid ühendava lõigu keskpunkt. Et lisaks punktile $(0,0)$ on märgitud veel rohkem kui 12 punkti, siis leidub nende 12 paari hulgas selline, mille mõlemad punktid on märgitud.

   Kui punkt $(0,0)$ ei ole märgitud, siis võime ülejäänud 24 punkti jaotada 8 kõrvutiasetsevate punktide kolmikuks (vt. joonist 6). Et märgitud punkte on rohkem kui $2\cdot 8 = 16$, siis leidub nende kolmikute hulgas selline, mille kõik kolm punkti on märgitud.



Joonis 6

Lahendus 2. Kui punkt $(0,0)$ on märgitud, siis arutleme samuti nagu esimeses lahenduses. Kui punkt $(0,0)$ ei ole märgitud, siis olgu märgitud k punkti $(x,0)$ ja m punkti $(0,y)$ — üldisust kitsendamata võime eeldada, et $k \geqslant m$. Oletame nüüd, et nõutava omadusega punktikolmikut ei leidu. Vaadeldes y-teljega paralleelseid vertikaale näeme, et kui mingil vertikaalil x-teljel paiknev punkt on märgitud, siis saab sellel vertikaalil olla kokku ülimalt 3 märgitud punkti (x-telje suhtes sümmeetrilised punktid ei tohi olla korraga märgitud); kui aga x-teljel paiknev punkt ei ole märgitud, siis saab sellel vertikaalil olla kokku ülimalt 4 märgitud punkti. Niisiis saab sel juhul märgitud punkte kokku olla ülimalt $m + 3k + 4(4-k) = m - k + 16 \leqslant 16$ — vastuolu.

4. *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = \sqrt{x}$.

Lahendus 1. Võttes antud võrduses $x = y$, saame $2xf(x) = 2f(x)^3$. Kui $f(x) \neq 0$, siis saame siit $x = f(x)^2$, ehk $f(x) = \sqrt{x}$. Seega iga x korral kas $f(x) = 0$ või $f(x) = \sqrt{x}$ ning juhul, kui ühegi $x_0 > 0$ korral ei ole $f(x_0) = 0$, kehtib iga x korral $f(x) = \sqrt{x}$. Oletame nüüd, et leidub selline reaalarv $x_0 > 0$, mille korral $f(x_0) = 0$. Siis saame antud võrdusest iga positiivse reaalarvu y korral $x_0 f(y) = 0$, s.t. $f(y) = 0$ iga y korral. Jääb üle kontrollida, et mõlemad funktsioonid $f(x) = 0$ ja $f(x) = \sqrt{x}$ rahuldavad ülesande tingimusi.

Lahendus 2. Võttes $x = y = 1$, saame $2f(1) = 2f(1)^3$, mistõttu $f(1) = 1$ või $f(1) = 0$. Kui $f(1) = 1$, siis võttes antud võrduses $y = 1$, saame iga x korral $x + f(x) = f(x)(f(x) + 1)$, millest $f(x)^2 = x$ ja $f(x) = \sqrt{x}$. Kui $f(1) = 0$, siis võttes samuti $y = 1$, saame $f(x) = 0$ iga x korral.

5. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Lahendus 1. a) Nimetame sõna *väärtuseks* avaldise $b+2a$ väärtust, kus b ja a on vastavalt tähtede B ja A arvud selles sõnas. Paneme tähele, et mistahes lubatud teisendus ei muuda sõna väärtuse jagamisel 3-ga tekkivat jääki. Et antud BAU-keeles olemasoleva sõna väärtus on $7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 23$ ja uuritava sõna väärtus on $9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 25$, siis uuritavat sõna BAU-keeles olla ei saa.

b) Näitame, et siin uuritav sõna on antud sõnast lubatud teisendustega konstrueeritav. Selleks veendume, et lubatud teisendustega on võimalik omavahel vahetada sõna mistahes kaks kõrvutist tähte. Tõepoolest, kui need kõrvutised tähed on BA, AU või UB, siis asendame need kõigepealt vastavalt tähtedega UU, BB või AA, pöörame kogu sõnas tähtede järjekorra ümber (asendusega saadud tähed UU, BB või AA sellest ei muutu), siis asendame need tähed UU, BB või AA tagasi vastavalt tähtedega BA, AU või UB, ning lõpuks pöörame veelkord kogu sõnas tähtede järjekorra ümber. Kui aga algsed kõrvutised tähed on AB, UA või BU, siis teeme samad sammud vastupidises järjekorras (pöörame ümber, asendame, pöörame ümber, asendame).

Korduvalt kõrvutisi tähti vahetades saame omavahel vahetada mistahes kaks tähte (nihutame kõigepealt teise tähe sammhaaval esimese kõrvale ja tõstame esimesest üle ning seejärel nihutame esimese tähe samamoodi teise tähe esialgsesse asukohta). Paneme tähele, et antud BAU-keele sõnas on 7 tähte B, 8 tähte A ja 10 tähte U, uuritavas sõnas aga 8 tähte B, 9 tähte A ja 8 tähte U. Seega võime kõigepealt asendada antud sõnas mingid kõrvutised tähed UU tähtedega BA ning siis sobivalt tähti ümber järjestades saame uuritava sõna.

Lahendus 2. a) Samuti nagu esimese lahenduse b) osas veendume, et lubatud teisendustega on võimalik mistahes kaks tähte omavahel ära vahetada. Seega mingi uuritava sõna olemasoluks BAU-keeles on tarvilik ja piisav, et mingis BAU-keele sõnas on sama palju tähti A, B ja U kui uuritavas sõnas. Kontrollime mõlemal juhul, kas vajalikud tähtede B, A ja U arvud on lubatud asenduste abil saavutatavad. Olgu x sooritatavate asenduste BA $\to$ UU ja UU $\to$ BA arvude vahe, y asenduste AU $\to$ BB ja BB $\to$ AU arvude vahe ning z asenduste UB $\to$ AA ja AA $\to$ UB arvude vahe. Esialgses sõnas on 7 tähte B, 8 tähte A ja 10 tähte U, uuritavas sõnas aga 9 tähte B, 8 tähte A ning 8 tähte U. Koostame võrrandisüsteemi tähtede arvude jaoks (võrrandid käivad vastavalt tähtede B, A ja U kohta):

$$\begin{cases} 7 - x + 2y - z = 9 \\ 8 - x - y + 2z = 8 \\ 10 + 2x - y - z = 8 \end{cases}.$$

Lahutades esimesest võrrandist teise saame võrrandi $3y - 3z = 2$, millel täisarvuline lahend puudub. Järelikult ei ole see võrrandisüsteem täisarvudes lahenduv ning uuritavat sõna antud sõnast konstrueerida ei saa.

b) Siin uuritavas sõnas on 8 tähte B, 9 tähte A ja 9 tähte U. Vastav võrrandisüsteem on

$$\begin{cases} 7 - x + 2y - z = 8 \\ 8 - x - y + 2z = 9 \\ 10 + 2x - y - z = 8 \end{cases}.$$

Selle võrrandisüsteemi üheks lahendiks on $x = 0$, $y = z = 1$. Seega saame uuritava sõna antud sõnast konstrueerida, rakendades üks kord asendusi AU $\to$ BB ja UB $\to$ AA ning muutes seejärel tähtede järjekorda.

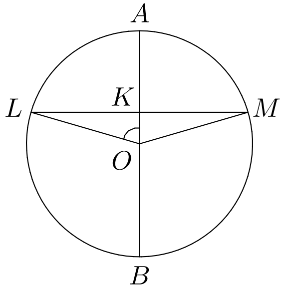
XII klass

1. *Vastus:* jah.

   Olgu AB ringjoone diameeter, millel paikneb punkt K (vt. joonist 7). Nihutades punkti K (ja samuti seda läbivat kõõlu LM) mööda diameetrit AB kaugemale ringjoone keskpunktist O, väheneb nurk KOL ning ühtlasi väheneb ka kõõluga LM ja ringjoone kaarega LAM piiratud segment. Seega piisab näidata, et kui $\angle KOL = 75°$, siis see segment moodustab rohkem kui kolmandiku kogu ringi pindalast.

   Olgu ringi raadius r ja $\angle KOL = 75°$, siis nurga LOM sisse jääva sektori pindala on $\frac{150}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{5}{12} \cdot \pi r^2$ ning kolmnurga LOM pindala on

$$\begin{aligned} S_{LOM} &= 2S_{LOK} = |LK| \cdot |OK| = r^2 \cdot \sin \angle KOL \cdot \cos \angle KOL = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\angle KOL = \frac{1}{4} r^2 . \end{aligned}$$



Joonis 7

Kõõluga LM ja ringjoone kaarega LAM piiratud segmendi pindala on sel juhul niisiis

$$\frac{5}{12}\cdot\pi r^2-\frac{1}{4}r^2=\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{4\pi}\right)\pi r^2\ .$$

Et $\pi>3$, siis $\frac{1}{4\pi}<\frac{1}{12}$ ning järelikult $\frac{5}{12}-\frac{1}{4\pi}>\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Seega moodustab vaadeldav segment juhul, kui $\angle KOL=75^\circ$, tõepoolest rohkem kui kolmandiku kogu ringi pindalast.

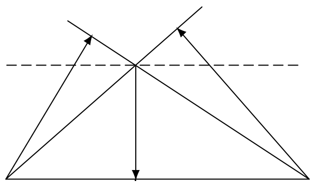
2. Näitame, et mistahes hetkel on Albertil võimalik valida üks suund ja ülimalt 3 käiguga saavutada olukord, kus nupp on liikunud esialgsest asukohast 1 ruudu võrra valitud suunas. Tõepoolest, nimetame valitud suunda *õigeks* ja teist suunda *valeks* ning vaatleme järgmist algoritmi:
   1) Albert ütleb arvu 1; kui Brita käib seepeale nupuga õiges suunas, siis on Alberti eesmärk saavutatud.
   2) Kui Albert eelmisel sammul eesmärki ei saavutanud (Brita käis nupuga vales suunas), siis ütleb ta nüüd arvu 2; kui Brita käib seepeale nupuga õiges suunas, siis on nupp kokkuvõttes nihkunud 1 ruudu võrra õiges suunas ning Alberti eesmärk on saavutatud.
   3) Kui Albert eelmistel sammudel eesmärki ei saavutanud (Brita käis mõlemal korral vales suunas), siis ütleb ta nüüd arvu 4; et seepeale peab Brita vastavalt mängureeglitele käima nupuga õiges suunas, siis on nupp kokkuvõttes nihkunud 1 ruudu võrra õiges suunas ning Alberti eesmärk on saavutatud.

Esimesel käigul öelgu Albert nüüd arv 4 — seepeale käib Brita nupuga 4 ruudu võrra mingis suunas. Edaspidi loeme selle suuna *õigeks* ning

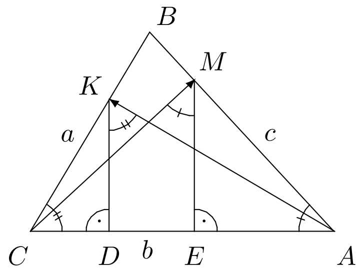
Albert saab ülalkirjeldatud algoritmi 6 korda rakendades, s.t. kokku ülimalt $1+6\cdot 3=19$ käiguga, sundida Britat nihutama nuppu veel 6 ruudu võrra samas suunas, s.t. üle riba otsa välja.

Märkus. Saab näidata, et Brital on võimalik käia nii, et varem kui 19. käigul ta nupuga ribalt välja ei astu.

3. *Lahendus 1.* Kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis on vektorid $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ võrdse pikkusega ja paarikaupa 120° nurga all, mistõttu $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.
Oletame nüüd ümberpöördult, et $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$. Olgu kolmnurgas ABC külgede BC, CA ja AB pikkused vastavalt a, b ja c ning pindala S, siis $|\overrightarrow{AK}|=\dfrac{2S}{a}$, $|\overrightarrow{BL}|=\dfrac{2S}{b}$ ja $|\overrightarrow{CM}|=\dfrac{2S}{c}$. Pöörates vektoreid $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ vastupäeva 90° võrra, muutuvad nad vastavate kolmnurga külgedega paralleelseteks ja kuna nende vektorite summa on nullvektor, saab neist kokku panna kolmnurga, mis on sarnane kolmnurgaga ABC. Olgu sarnasusteguriks k, siis $|\overrightarrow{AK}|=ka$, $|\overrightarrow{BL}|=kb$ ja $|\overrightarrow{CM}|=kc$. Järelikult $\dfrac{2S}{a}=|\overrightarrow{AK}|=ka$, kust $a=\sqrt{\dfrac{2S}{k}}$. Analoogiliselt leiame, et ka $b=c=\sqrt{\dfrac{2S}{k}}$, s.t. kolmnurk ABC on võrdkülgne.



Joonis 8



Joonis 9

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses veendume, et võrdkülgse kolmnurga ABC korral nõutav tingimus kehtib. Kehtigu nüüd kolmnurgas ABC tingimus $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$. Esmalt paneme tähele, et kolmnurk ABC ei saa olla täis- või nürinurkne, sest siis oleks kummagi teravnurga tipust tõmmatud kõrgusvektori projektsioon kolmanda (täis- või nürinurga tipust tõmmatud) kõrgusvektori sihile juba üksinda sama pikk kui see kolmas kõrgusvektor, mistõttu need vektorid ei saaks summana enda nullvektorit (vt. joonist 8). Vaatleme nüüd vektorite $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ projektsioone küljele AC. Et vektori $\overrightarrow{BL}$ projektsioon küljele AC on 0, kuna tegu on kõrgusvektoriga, siis peavad vektorite $\overrightarrow{AK}$ ja $\overrightarrow{CM}$ projektsioonid küljele AC olema ühepikkused. Olgu $|AC| = b$, $\angle BAC = \alpha$ ja $\angle BCA = \gamma$ ning olgu D ja E vastavalt punktide K ja M projektsioonid küljele AC, siis vektori $\overrightarrow{AK}$ projektsiooni pikkus on

$$\begin{aligned}|AD| &= |AK| \cdot \sin \angle AKD = |AC| \cdot \sin \angle ACB \cdot \sin \angle AKD = \\ &= b \cdot \sin^2 \gamma\end{aligned}$$

ning vektori $\overrightarrow{CM}$ projektsiooni pikkus on analoogiliselt $b \cdot \sin^2 \alpha$ (vt. joonist 9). Et need oleksid võrdsed, peab olema $\alpha = \gamma$. Analoogilise arutlusega külje AB jaoks saame, et $\alpha = \beta$, s.t. kolmnurk ABC on võrdkülgne.

4. *Lahendus 1.* Rakendades iga murru nimetajale aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{1+b^2+c^2} + \frac{1}{1+c^2+a^2} .$$

Rakendades nüüd kogu avaldisele aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{1+b^2+c^2} + \frac{1}{1+c^2+a^2} \geqslant \\ &\quad \geqslant 3 \cdot \frac{3}{(1+a^2+b^2)+(1+b^2+c^2)+(1+c^2+a^2)} = \\ &\quad = \frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{3+2\cdot 3} = 1 .\end{aligned}$$

Lahendus 2. Aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant\frac{9}{3+2ab+2bc+2ca}=$$
$$=\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ .$$

Aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ ,$$

kust ruutu tõstes saame

$$\frac{(a+b+c)^2}{9}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{3}=1\ .$$

Seega

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant\frac{9}{(a+b+c)^2}\geqslant 1\ .$$

Lahendus 3. Korrutades tõestatava võrratuse mõlemad pooled läbi teguriga $(1+2ab)(1+2bc)(1+2ca)$, koondades saadavas võrratuses sarnased liikmed ning jagades läbi 8-ga, saame tõestatavaga samaväärse võrratuse

$$\frac{1+ab+bc+ac}{4}\geqslant a^2b^2c^2\ .$$

Paneme nüüd tähele, et

$$1=\frac{3}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ ,$$

kust $abc\leqslant 1$ ning seega

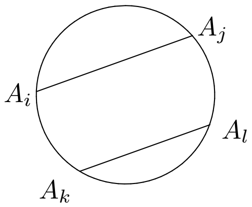
$$a^2b^2c^2=(abc)^2\leqslant\sqrt{abc}\ .$$

Niisiis tõepoolest

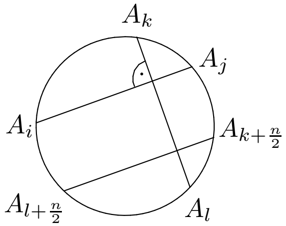
$$\frac{1+ab+bc+ac}{4}\geqslant\sqrt[4]{a^2b^2c^2}=\sqrt{abc}\geqslant a^2b^2c^2\ .$$

5. *Lahendus 1.* a) Lõigud A_iA_j ja A_kA_l on paralleelsed parajasti siis, kui $i-k \equiv l-j \pmod{n}$ (vt. joonist 10). Seega

$$\begin{aligned} A_iA_j \parallel A_kA_l &\Rightarrow i-k \equiv l-j \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c(i-k) \equiv c(l-j) \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ci-ck \equiv cl-cj \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow i'-k' \equiv l'-j' \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{i'}A_{j'} \parallel A_{k'}A_{l'}\,. \end{aligned}$$



Joonis 10



Joonis 11

b) Paneme kõigepealt tähele, et mistahes kahe vaadeldava lõigu vaheline nurk on $\frac{\pi}{n}$ täisarvuline kordne — seega nurk $\frac{\pi}{2}$ saab esineda ainult paarisarvulise n korral. Et arvud c ja n on ühistegurita, siis peab c sel juhul olema paaritu, mistõttu $c \cdot \frac{n}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$.

Ilmselt on lõigud A_iA_j ja A_kA_l risti parajasti siis, kui lõik A_iA_j on paralleelne nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra pööratud lõiguga A_kA_l. Pöörates lõiku A_kA_l ümber vaadeldava hulknurga ümberringjoone keskpunkti nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra, saame lõigu $A_{k+\frac{n}{4}}A_{l+\frac{n}{4}}$ (vt. joonist 11; kui n ei jagu 4-ga, siis tuleb lõigu $A_{k+\frac{n}{4}}A_{l+\frac{n}{4}}$ asemel vaadelda samasihilist lõiku $A_{k+\frac{n+2}{4}}A_{l+\frac{n-2}{4}}$, mis järgnevas arutelus midagi ei muuda). Seega

$$A_iA_j \perp A_kA_l \iff i-\left(k+\frac{n}{4}\right) \equiv \left(l+\frac{n}{4}\right)-j \pmod{n} \iff$$

$$\iff i-k \equiv l-j+\frac{n}{2} \pmod n$$

ning

$$\begin{aligned}
A_iA_j \perp A_kA_l &\Rightarrow i-k \equiv l-j+\frac{n}{2} \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow c(i-k) \equiv c\Big(l-j+\frac{n}{2}\Big) \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow ci-ck \equiv cl-cj+c\,\frac{n}{2} \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow i'-k' \equiv l'-j'+\frac{n}{2} \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'} \pmod n\ .
\end{aligned}$$

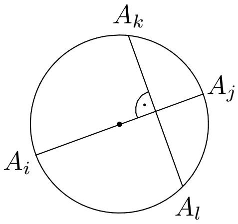
Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses tõestame a) osa. Tuntud geomeetriateoreemi põhjal

$$\begin{aligned}
A_iA_j \perp A_kA_l &\iff \overset{\frown}{A_iA_k} + \overset{\frown}{A_jA_l} = \overset{\frown}{A_kA_j} + \overset{\frown}{A_lA_i} \iff \\
&\iff (k-i)+(l-j) \equiv (j-k)+(i-l) \pmod n \iff \\
&\iff 2(k+l-i-j) \equiv 0 \pmod n\ ,
\end{aligned}$$

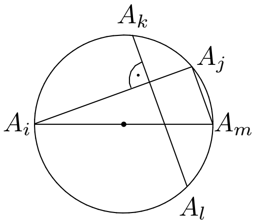
kus vaadeldavad kaared on võetud hulknurga ümberringjoonel. Seega

$$\begin{aligned}
A_iA_j \perp A_kA_l &\Rightarrow 2(k+l-i-j) \equiv 0 \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2c(k+l-i-j) \equiv 0 \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2(k'+l'-i'-j') \equiv 0 \pmod n \Rightarrow \\
&\Rightarrow A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'}\ .
\end{aligned}$$

Lahendus 3. Samuti nagu esimeses lahenduses tõestame a) osa ja paneme tähele, et n on paaris ja c paaritu, mistõttu $c\cdot\frac{n}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod n$. Seega $c(i+\frac{n}{2}) = ci + c\,\frac{n}{2} \equiv ci + \frac{n}{2} \pmod n$, ehk hulknurga ümberringjoone diameetrile vastab alati diameeter. Edasi vaatleme kahte juhtu.



Joonis 12



Joonis 13

Kui lõik A_iA_j on hulknurga ümberringjoone diameeter, siis $j \equiv i + \dfrac{n}{2} \pmod n$ ning $A_iA_j \perp A_kA_l$ siis ja ainult siis, kui $j - k \equiv l - j \pmod n$ (vt. joonist 12). Siis $cj - ck = c(j - k) \equiv \equiv c(l - j) = cl - cj \pmod n$ ehk $j' - k' \equiv l' - j' \pmod n$ ning järelikult $A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'}$.

Kui lõik A_iA_j ei ole hulknurga ümberringjoone diameeter, siis vaatleme sellist tippu A_m, et A_iA_m on diameeter (vt. joonist 13). Siis $A_iA_j \perp A_jA_m$, sest nurk $A_iA_jA_m$ toetub ümberringjoone diameetrile A_iA_m. Kuna diameetrile vastab diameeter, siis toetub ka nurk $A_{i'}A_{j'}A_{m'}$ diameetrile, mistõttu $A_{i'}A_{j'} \perp A_{j'}A_{m'}$. Kuna $A_iA_j \perp A_jA_m$ ja $A_iA_j \perp A_kA_l$, siis $A_jA_m \parallel A_kA_l$ ning a) osa põhjal $A_{j'}A_{m'} \parallel A_{k'}A_{l'}$. Seega $A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'}$.