Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvude paarid (x, y), mille korral

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x} .$$

2. Viie erineva positiivse täisarvu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 positiivsed vahed $a_i - a_j$ (neid vahesid on kokku 10) on kõik erinevad. Leia arvudest a_i suurima vähim võimalik väärtus.

3. Kumera nelinurga $ABCD$ külgedel AB ja BC võetakse vastavalt punktid M ja N nii, et kumbki lõikudest AN ja CM jaotab nelinurga $ABCD$ kaheks võrdse pindalaga osaks. Tõesta, et lõigud MN ja AC on paralleelsed.

4. Tõesta, et arv $n^n - n$ jagub 24-ga mistahes paaritu naturaalarvu n korral.

5. Kolm erinevat võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad punktis Q. Ringjoon $\mathcal{C}$ puutub neid kõiki. Tõesta, et Q on ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral $x < y < z$ ning $\text{SÜT}\,(x, y) = 6$, $\text{SÜT}\,(y, z) = 10$, $\text{SÜT}\,(z, x) = 8$ ja $\text{VÜK}\,(x, y, z) = 2400$.

2. Rööpküliku $ABCD$ külgedel BC ja AB võetakse vastavalt punktid M ja N nii, et $|AM| = |CN|$. Olgu P lõikude AM ja CN lõikepunkt. Tõesta, et nurga APC poolitaja läbib tippu D.

3. Õpetaja oli kirjutanud tahvlile arvu, mis koosnes teatud arvust numbritest 4 ja neile järgnevatest samapaljudest numbritest 8, kui koolikell helises. Vahetunnil astus Juku tahvli juurde ja lisas arvu ette veel ühe numbri 4 ja lõppu numbri 9. Tõesta, et tekkinud arv on mingi täisarvu ruut.

4. Algul on punkti $(0, 0)$ kirjutatud arv 1 ning tasandi igasse teise täisarvuliste koordinaatidega punkti arv 0. Iga sekundi järel asendatakse kõik need arvud, kirjutades igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti selle punkti neljas naaberpunktis eelmisel sekundil olnud arvude summa. Leia kõigis täisarvuliste koordinaatidega punktides olevate arvude summa n sekundi järel.

5. Reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrdusi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ja $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Leia summa $a + b + c$ väärtus.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised täisarvude paarid (a, b), et $a^2 + ab + b^2 = 1$.

2. Läbi nurga AOB poolitajal valitud punkti M tõmmatakse sirge, mis lõikab nurga haarasid OA ja OB vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et summa $\dfrac{1}{|OK|} + \dfrac{1}{|OL|}$ väärtus ei sõltu punkti M läbiva sirge valikust, s.t. on määratud nurga AOB suurusega ja punkti M valikuga nurgapoolitajal.

3. Tasandi 25 punktist, mille mõlemad koordinaadid on täisarvud hulgast $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, märgitakse mingid 17 punkti. Tõesta, et leiduvad sellised kolm märgitud punkti, millest üks on kaht ülejäänut ühendava lõigu keskpunkt.

4. Leia kõik funktsioonid $f(x)$, mis on määratud mittenegatiivsetel reaalarvudel x, omandavad mittenegatiivseid reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral tingimust
$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot \big(f(x) + f(y)\big)\ .$$

5. BAU-keele tähestik koosneb kolmest tähest B, A ja U. On teada, et alustades mistahes n-tähelisest BAU-keele sõnast ning rakendades korduvalt järgmisi reegleid (1) ja (2), saame kõik n-tähelised BAU-keele sõnad ja ainult need:
   (1) kirjutame sõna kõik tähed vastupidises järjekorras;
   (2) asendame kaks kõrvutiasetsevat tähte: BA $\to$ UU, AU $\to$ BB, UB $\to$ AA, UU $\to$ BA, BB $\to$ AU või AA $\to$ UB.

   Kui BBAUABAUUABAUUUABAUUUUABB on BAU-keele sõna, kas siis BAU-keeles leidub sõna
   a) BUABUABUABUABAUBAUBAUBAUB;
   b) ABUABUABUABUAUBAUBAUBAUBA?

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ringi sisepiirkonnas võetakse punkt K nii, et punktist K läbi ringi keskpunkti O tõmmatud kiir ja selle kiirega risti olev punkti K läbiv ringjoone kõõl jaotavad ringi kolmeks võrdse pindalaga osaks. Olgu L vaadeldava kõõlu üks otspunkt. Kas kehtib võrratus $\angle KOL < 75^\circ$?

2. Albert ja Brita mängivad 19 kõrvutiasetsevast ruudust koosneval ribal järgmist mängu. Algul on riba keskmisel ruudul üks nupp. Igal käigul ütleb Albert ühe 5-st väiksema positiivse täisarvu ning Brita nihutab nuppu vastava arvu ruutude võrra oma valitud suunas — seejuures ei tohi aga Brita nihutada nuppu ühes suunas rohkem kui kaks korda järjest. Tõesta, et Albert saab öelda arve nii, et hiljemalt 19. käigul on Brita sunnitud nupuga ribalt välja käima.

3. Olgu K, L ja M vastavalt kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$ siis ja ainult siis, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne.

4. Olgu a, b ja c sellised positiivsed reaalarvud, et $a^2+b^2+c^2=3$. Tõesta, et kehtib võrratus
$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant 1\,.$$

5. Olgu n ja c ühistegurita positiivsed täisarvud. Mistahes täisarvu i korral tähistagu i' korrutise ci jagamisel n-ga tekkivat jääki. Olgu $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ korrapärane n-nurk. Tõesta, et
   a) kui lõigud A_iA_j ja A_kA_l on paralleelsed, siis lõigud $A_{i'}A_{j'}$ ja $A_{k'}A_{l'}$ on samuti paralleelsed;
   b) kui lõigud A_iA_j ja A_kA_l on risti, siis lõigud $A_{i'}A_{j'}$ ja $A_{k'}A_{l'}$ on samuti risti.