Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

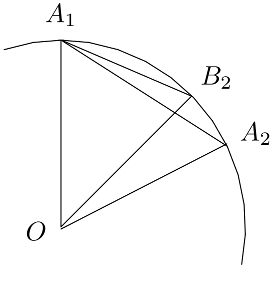
Lahendused ja vastused

IX klass

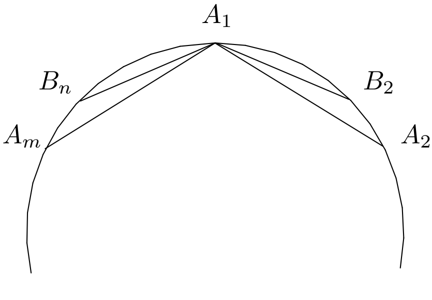
1. *Vastus:* $\dfrac{n-m}{nm}\,\pi$.

Lahendus 1. Paneme tähele, et nurk $B_2A_1A_2$ kui kõõlule B_2A_2 toetuv piirdenurk moodustab poole vastavast kesknurgast B_2OA_2 (vt. joonist 1). Kuna $\angle A_1OA_2 = \dfrac{2\pi}{m}$ ja $\angle A_1OB_2 = \dfrac{2\pi}{n}$, siis

$$\begin{aligned}\angle B_2A_1A_2 &= \frac{\angle B_2OA_2}{2} = \frac{\angle A_1OA_2 - \angle A_1OB_2}{2} = \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{n} = \\ &= \frac{n-m}{nm}\,\pi\,.\end{aligned}$$



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus 2. Korrapärase hulknurga sisenurga suuruse valemist saame $\angle A_mA_1A_2 = \dfrac{m-2}{m}\,\pi$ ja $\angle B_nA_1B_2 = \dfrac{n-2}{n}\,\pi$ (vt. joonist 2). Sümmeetria tõttu

$$\angle B_2A_1A_2 = \frac{\angle B_nA_1B_2 - \angle A_mA_1A_2}{2} = \frac{m(n-2)-n(m-2)}{2nm}\,\pi =$$

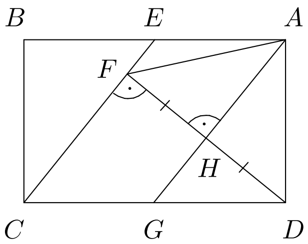
$$= \frac{n-m}{nm}\,\pi\,.$$

2. *Vastus:* arvud kujul $6k+1$, kus $k=0,1,\ldots$.
Paneme tähele, et kui vaadeldav võrdus kehtib (või ei kehti) mingi n korral, siis kehtib (vastavalt ei kehti) ta ka $n+6$ korral. Tõepoolest, $(n+6)-n=6$, $\left[\frac{n+6}{6}\right]=\left[\frac{n}{6}+1\right]=\left[\frac{n}{6}\right]+1$ ning analoogiliselt $\left[\frac{n+6}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+3$ ja $\left[\frac{2(n+6)}{3}\right]=\left[\frac{2n}{3}\right]+4$, mistõttu n suurendamisel 6 võrra suureneb nii võrduse vasak kui ka parem pool täpselt 7 võrra.
Jääb üle kontrollida võrduse kehtivust $n=0,1,2,3,4,5$ korral. Näeme, et

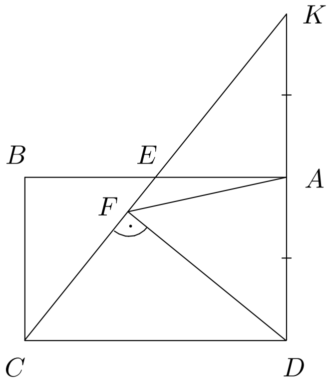
$$0+\left[\frac{0}{6}\right]=0=0+0=\left[\frac{0}{2}\right]+\left[\frac{2\cdot 0}{3}\right],$$
$$1+\left[\frac{1}{6}\right]=1\neq 0+0=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2\cdot 1}{3}\right],$$
$$2+\left[\frac{2}{6}\right]=2=1+1=\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{2\cdot 2}{3}\right],$$
$$3+\left[\frac{3}{6}\right]=3=1+2=\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{2\cdot 3}{3}\right],$$
$$4+\left[\frac{4}{6}\right]=4=2+2=\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{2\cdot 4}{3}\right],$$
$$5+\left[\frac{5}{6}\right]=5=2+3=\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{2\cdot 5}{3}\right].$$

3. *Lahendus 1.* Olgu G külje CD keskpunkt ning H lõikude DF ja AG lõikepunkt (vt. joonist 3). Et lõigud AG ja CE on paralleelsed, siis AG on risti lõiguga DF, s.t. AH on kolmnurga FAD kõrgus. Teisalt saame lõikude AG ja CE paralleelsusest, et $\frac{|FH|}{|HD|}=\frac{|CG|}{|GD|}=1$, ehk AH on kolmnurga FAD mediaan. Järelikult $|FA|=|DA|$, s.t. kolmnurk FAD on võrdhaarne.

Lahendus 2. Pikendame lõiku DA üle punkti A ja lõiku CE üle punkti E kuni lõikumiseni punktis K (vt. joonist 4). Kuna $|AE|=\frac{|DC|}{2}$, siis $|AK| = |AD|$. Joonestame ringjoone keskpunktiga punktis A, mis läbib tippu D ning äsjatõestatu põhjal ka punkti K, kusjuures DK on selle ringjoone diameeter. Et $\angle KFD = 90^\circ$, siis punkt F asub sellel ringjoonel. Seega lõigud AF ja AD on võrdse pikkusega kui selle ringjoone raadiused, s.t. kolmnurk FAD on võrdhaarne.



Joonis 3



Joonis 4

Lahendus 3. Et E on ristküliku külje AB keskpunkt, siis täisnurksed kolmnurgad EAD ja EBC on kongruentsed. Kuna $\angle DAE = \angle DFE = 90^\circ$, siis $AEFD$ on kõõlnelinurk. Järelikult $\angle AFD = \angle AED = \angle BEC$. Teiselt poolt aga saame kõõlnelinurgast $AEFD$, et $\angle ADF = 180^\circ - \angle AEF = \angle BEC$. Niisiis $\angle AFD = \angle ADF$, s.t. kolmnurk FAD on võrdhaarne.

4. *Vastus:* $2 : 3$.

Lahendus 1. Enne osa segu väljavalamist sisaldas 350 ml täis pudel 140 ml põdrasamblateed, mis moodustas seega $\frac{2}{5}$ pudelis olevast segust ning järelikult ka $\frac{2}{5}$ väljavalatavast segust. Paneme tähele, et:

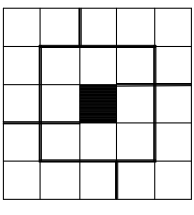
(1) väljavalatava ja juurdelisatava segu kogused olid võrdsed,

(2) kuna lõpuks oli pudelis põdrasamblateed 140 ml, s.t. niisama palju kui enne, oli juurdelisatavas segus põdrasamblateed niisama palju kui väljavalatavas.

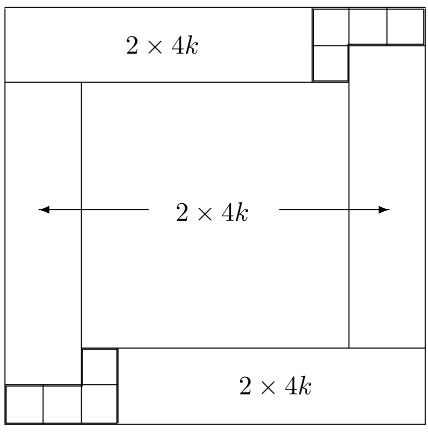
Siit nähtub, et väljavalatavas ja juurdelisatavas segus pidi ka põdrasamblatee osamaht olema sama, s.t. põdrasamblatee ja hundijalavesi moodustasid ka juurdelisatavas segus vastavalt $\frac{2}{5}$ ja $\frac{3}{5}$ osa. Seega nende ainete koguste omavaheline vahekord oli $2:3$.

Lahendus 2. Olgu x ml ekslikult rohkem pudelisse valatud kärbseseeneleotise maht. Siis segu pudelis enne sellest osa väljavalamist (ja ühtlasi ka väljavalatud segu) sisaldas põdrasamblateed, kärbseseeneleotist ja hundijalavett vahekorras $140 : (160{+}x) : (50{-}x)$. Et kärbseseeneleotist valati välja täpselt x ml (kuna seda hiljem enam juurde ei lisatud), siis põdrasamblateed valati välja $\frac{140}{160+x}\cdot x$ ml ning hundijalavett $\frac{50-x}{160+x}\cdot x$ ml. Tagasi pudelisse valati järelikult põdrasamblateed $\frac{140}{160+x}\cdot x$ ml ning hundijalavett $\frac{50-x}{160+x}\cdot x+x$ ml ning nende segu oli seega vahekorras

$$\frac{\frac{140}{160+x}\cdot x}{\frac{50-x}{160+x}\cdot x+x}=\frac{\frac{140}{160+x}}{\frac{50-x}{160+x}+1}=\frac{140}{(50-x)+(160+x)}=\frac{140}{210}=\frac{2}{3}\,.$$



Joonis 5



Joonis 6

5. *Vastus:* a) jah; b) jah.

a) Sobiv katmisviis on näidatud joonisel 5.

b) Joonisel 6 on näidatud, kuidas katta L-kujunditega riba laiusega

2 ümber $(4k-1) \times (4k-1)$ ruudu (siin kasutame seda, et 2×4 ristkülikut on ilmselt võimalik katta kahe L-kujundiga). Rakendades seda konstruktsiooni 500 korda, saame kattest $n = 3$ jaoks (selle olemasolu on näha jooniselt 5) katte $n = 3 + 500 \cdot 4 = 2003$ jaoks.

X klass

1. *Vastus:* 4.

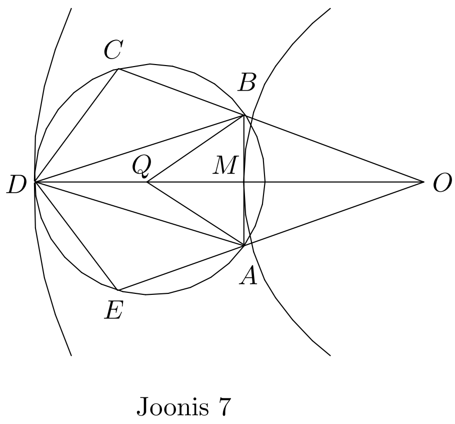
Olgu üks viisnurkadest $ABCDE$, kus tipud on tähistatud nii, et väiksem ringjoon puutub külge AB ning suurem ringjoon läbib tippu D (vt. joonist 7). Olgu antud ringjoonte ühine keskpunkt O, viisnurga $ABCDE$ ümberringjoone keskpunkt Q ning lõigu AB keskpunkt M, siis

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

ning

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AQB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ .$$

Võrdhaarsed kolmnurgad AOB ja ADB on seega võrdsed ning $|OD| = |OM| + |MD| = 2\,|OM|$. Et väikese ringjoone raadius on OM ning suure ringjoone raadius OD, siis suure ringjoone pindala on võrdne väikese ringjoone neljakordse pindalaga.



Joonis 7

2. *Vastus:* 2 ja -2.

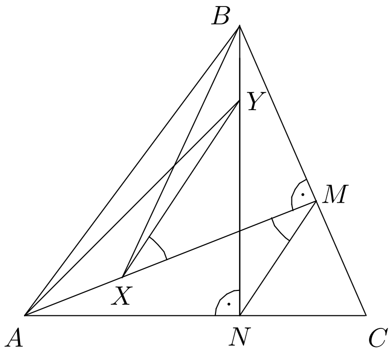
Kui $\dfrac{m^2+n^2}{mn}$ on täisarv, siis mn on arvu m^2+n^2 jagaja, kust näeme, et m on n^2 jagaja ning n on m^2 jagaja. Seega peavad arvude m ja n algteguriteks lahutused sisaldama ühtesid ja samu algtegureid. Näitame nüüd, et ka iga algteguri astendaja arvude m ja n algteguriteks lahutustes peab olema üks ja sama, s.t. $m = \pm n$. Tõepoolest, olgu $m = p^a m'$ ja $n = p^b n'$, kus arvud m' ja n' ei jagu algarvuga p ning $a > b$. Siis arvud mn ja m^2 jaguvad arvuga p^{a+b}, kuid arv n^2 ei jagu (jagub ainult arvuga p^{2b}, kus $2b = b + b < a + b$) — vastuolu.

Järelikult $m = \pm n$, s.t. $\dfrac{m^2+n^2}{mn} = \dfrac{2n^2}{\pm n^2} = \pm 2$.

3. Paneme tähele, et $\angle AXB = 180^\circ - \angle MXB = 135^\circ$ (vt. joonist 8) ning analoogiliselt $\angle AYB = 135^\circ$. Niisiis punktid A, X, Y ja B paiknevad ühel ringjoonel ning

$$\begin{aligned}\angle MXY &= 180^\circ - \angle AXY = \angle ABY = \angle ABN = \angle AMN = \\ &= \angle XMN\,.\end{aligned}$$

Sellega olemegi näidanud, et lõigud MN ja XY on paralleelsed.



Joonis 8

4. *Lahendus 1.* Kasutades positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, mistõttu

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{abc}{3\sqrt[3]{abc}} = \frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{3}\,.$$

Et $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$ ja $c \leqslant 2$, siis $abc \leqslant 8$ ning

$$\frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{3} \leqslant \frac{\sqrt[3]{64}}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

Lahendus 2. Tõestame ülesandes antuga samaväärse võrratuse

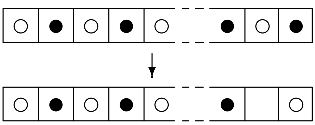
$$\frac{a+b+c}{abc} \geqslant \frac{3}{4}\,.$$

Kirjutades selle võrratuse vasaku poole kolme liidetava summana ning kasutades positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

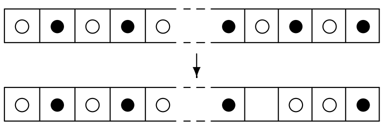
$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\,.$$

Et $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$ ja $c \leqslant 2$, siis $abc \leqslant 8$ ning $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$, kust saamegi nõutava võrratuse.

5. Kui riba pikkus on $2(k+1)$, võib alustaja oma avakäigul lüüa vastase nupu, mis paikneb riba otsmisel ruudul (vt. joonist 9). Seejärel riba kaks otsmist ruutu enam edasises mängus ei osale (seal oleva alustaja nupuga ei saa enam käia ning ühegi nupuga riba ülejäänud osalt ei saa sinna käia) ning alustaja vastane teeb seega sisuliselt avakäigu ribal pikkusega $2k$. Vastavalt eeldusele on sel juhul võitev strateegia avakäigu tegija vastasmängijal, s.t. meie vaadeldava mängu alustajal.



Joonis 9



Joonis 10

Kui riba pikkus on $2(k+2)$, võib alustaja oma avakäigul oma nupuga, mis paikneb riba otsast lugedes 4. ruudul, lüüa vastase nupu riba otsast lugedes 3. ruudult (vt. joonist 10). Seejärel on riba jaotunud kaheks osaks — kolmest otsmisest ruudust koosnev *väike* osa ja $2k$ ruudust koosnev *suur* osa — ning iga järgmine käik toimub neist ühe piires. Alustaja edasine strateegia on nüüd järgmine: kui vastane teeb käigu riba väikesel osal, siis teeb ka alustaja oma järgmise käigu väikesel osal ning seejärel riba väike osa edasises mängus enam ei osale; kui vastane teeb aga käigu riba suurel osal, siis alustaja kasutab avakäigu tegija vastasmängijal vastavalt eeldusele olemasolevat võitvat strateegiat $2k$ korral.

XI klass

1. *Lahendus 1.* Asugu Juhan punktis J ning Opel, Trabant ja Mercedes i-ndal vaadeldaval ajahetkel vastavalt punktides O_i, T_i ja M_i (siin $i = 0$ vastab ajahetkele, mil Trabant möödus Juhanist, $i = 1$ ajahetkele, mil Mercedes möödus Juhanist, ning $i = 2$ ajahetkele, mil Opel möödus Juhanist). Siis $T_0 = M_1 = O_2 = J$, $\overrightarrow{M_0J} = -\overrightarrow{O_0J}$, $\overrightarrow{T_1J} = -\overrightarrow{O_1J}$ ning kõigi autode ühtlase kiirusega liikumise tõttu

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_2J} - \overrightarrow{T_0J} &= k(\overrightarrow{T_1J} - \overrightarrow{T_0J}) , \\ \overrightarrow{M_2J} - \overrightarrow{M_0J} &= k(\overrightarrow{M_1J} - \overrightarrow{M_0J}) , \\ \overrightarrow{O_2J} - \overrightarrow{O_0J} &= k(\overrightarrow{O_1J} - \overrightarrow{O_0J}) , \end{aligned}$$

kus k on mingi fikseeritud reaalarv (kusjuures $k \neq 0$ ja $k \neq 1$, kui kõik kolm autot ei möödunud Juhanist korraga, millisel juhul ülesande väide ilmselt kehtib). Arvestades tingimusi $T_0 = M_1 = O_2 = J$, saame need võrrandid kirjutada kujul

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_2J} &= k\overrightarrow{T_1J} , \\ \overrightarrow{M_2J} &= (1-k)\overrightarrow{M_0J} , \\ \overrightarrow{O_0J} &= \frac{k}{k-1}\overrightarrow{O_1J} . \end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_2J} &= (1-k)\overrightarrow{M_0J} = (k-1)\overrightarrow{O_0J} = k\overrightarrow{O_1J} = -k\overrightarrow{T_1J} = \\ &= -\overrightarrow{T_2J} , \end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Võtame kasutusele fiktiivse auto, mille asukoht igal ajahetkel on Opeli asukoha peegeldus Juhani asukoha suhtes — nimetame seda fiktiivset autot Lepo'ks. Olgu t_0, t_1 ja t_2 ajahetked, mil vastavalt

Trabant, Mercedes ja Opel möödub Juhanist. Siis vastavalt ülesande tingimustele Lepo asub hetkel t_0 samas kohas, kus Mercedes, ja hetkel t_1 samas kohas, kus Trabant.

Kuna kõigi autode liikumine on ühtlane ja sirgjooneline, siis võime valida taustsüsteemi vabalt. Olgu Juhaniga seotud taustsüsteemis Trabanti koordinaat ajahetkedel t_0, t_1 ja t_2 vastavalt 0, x ja y. Siis Opeli peegelduse Lepoga seotud taustsüsteemis on Mercedese koordinaat ajahetkedel t_0 ja t_1 vastavalt 0 ja $-x$ ning ajahetkel t_2 järelikult $-y$. Kuna hetkel t_2 asuvad Juhan, Opel ja Lepo kõik ühes ja samas punktis, siis on sellel hetkel Juhaniga seotud taustsüsteemis Trabanti koordinaat y ja Mercedese koordinaat $-y$.

2. *Vastus:* võrdus kehtib, kui $a = b = c = \sqrt{3}$.

Kasutades kaks korda positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}} =$$
$$= 2\sqrt{3}\,.$$

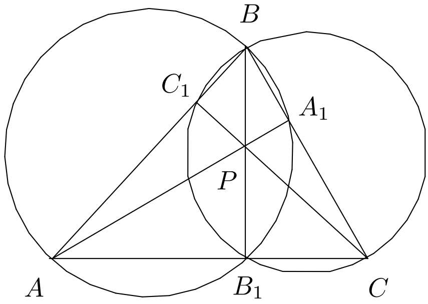
Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b = c$ ning $\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, millest saame $\sqrt[3]{a^3} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}}$ ehk $a = \frac{3}{a}$. Järelikult $a = b = c = \sqrt{3}$.

Märkus. Tegelikult olümpiaadil esitatud sõnastuses oli sõna “reaalarvude” asemele kogemata sattunud “täisarvude”. Võrratuse tõestust see ei mõjuta, kuid nagu ülaltoodud lahendusest näha, võrdus siin täisarvude korral kehtida ei saa.

3. a) Olgu lõikude AA_1, BB_1 ja CC_1 ühine lõikepunkt P (vt. joonist 11). Et AB_1A_1B on kõõlnelinurk, siis $\angle A_1AB_1 = \angle A_1BB_1$ ning kolmnurgad PA_1B ja PB_1A on sarnased. Seega $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PB_1|}{|PA_1|}$, ehk $|PA| \cdot |PA_1| = |PB| \cdot |PB_1|$ (see lõikuvate kõõlude omadus on õigupoolest hästi tuntud). Et ka BC_1B_1C on kõõlnelinurk, siis analoogiliselt saame $|PC| \cdot |PC_1| = |PB| \cdot |PB_1|$. Niisiis $|PA| \cdot |PA_1| = |PC| \cdot |PC_1|$, ehk $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PC_1|}{|PA_1|}$, mistõttu kolmnurgad PA_1C ja PC_1A on sarnased ning $\angle A_1AC_1 = \angle A_1CC_1$. Seega CA_1C_1A on samuti kõõlnelinurk,

s.t. punktid C, A_1, C_1 ja A paiknevad ühel ringjoonel.

b) Kuna AB_1A_1B, BC_1B_1C ja CA_1C_1A on kõik kõõlnelinurgad, siis $\angle AA_1B = \angle AB_1B$ ja $\angle AA_1C = \angle AC_1C$ ning samuti $\angle AB_1B = \angle AC_1C$, sest nende nurkade täiendnurgad $\angle CB_1B$ ja $\angle CC_1B$ on võrdsed. Seega $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 180^\circ - \angle AA_1B$, millest järeldub, et $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^\circ$ ja lõik AA_1 on risti küljega BC. Analoogiliselt tõestame, et lõik BB_1 on risti küljega CA ning lõik CC_1 on risti küljega AB.



Joonis 11

4. Nõutud omadusega on kõik arvud kujul m^2+m ning m^2+2m, kus m on mistahes positiivne täisarv. Tõepoolest, kuna

$$m^2 < m^2+m < m^2+2m < (m+1)^2 ,$$

siis

$$m < \sqrt{m^2+m} < \sqrt{m^2+2m} < m+1 ,$$

s.t. $\sqrt{m^2+m}$ ja $\sqrt{m^2+2m}$ ei ole täisarvud ning nende ühine täisosa $[\sqrt{m^2+m}] = [\sqrt{m^2+2m}] = m$ on arvude m^2+m ning m^2+2m jagaja.

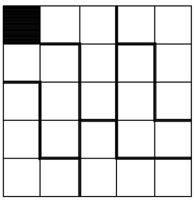
5. *Vastus:* kõik paarisarvud.

Joonisel 13 on näidatud, kuidas konstrueerida antud kattest $n = 2m$ jaoks kate $n = 2(m+1)$ jaoks (siin kasutame seda, et 2×4 ristkülikut on ilmselt võimalik katta kahe L-kujundiga). Rakendades seda konstruktsiooni vajalik arv kordi, saame joonisel 12 näidatud kattest $n = 2$ jaoks katte mistahes paarisarvulise n jaoks.

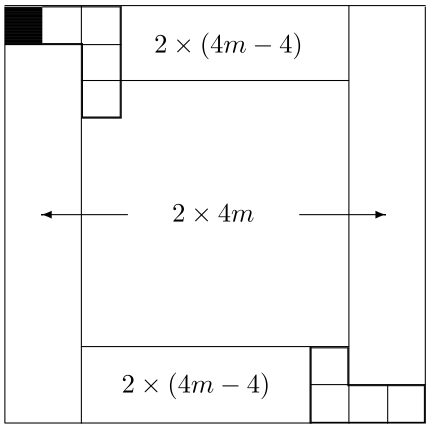
Olgu nüüd $n = 2m + 1$. Värvime ruudustiku read vaheldumisi mustaks ja valgeks. Et kokku on värvitavas kujundis $2n + 1 = 4m + 3$ rida ning iga rida peale ühe äärmise sisaldab paaritu arvu ruute, siis saame kumbagi värvi ruute paaritu arvu. Kuna iga L-kujund katab mistahes paigutuse korral parajasti ühe ühte värvi ruudu ja kolm teist värvi ruutu, peab kattes L-kujundeid olema paaritu arv. Teisalt on kogu kaetavas kujundis ruute kokku

$$(4m + 3)^2 - 1 = 16m^2 + 24m + 8\ ,$$

see arv aga jagub 8-ga ning järelikult peab kattes L-kujundeid olema paarisarv. Saadud vastuolu näitab, et paarituarvulise n korral ei ole ruudustiku katmine L-kujunditega võimalik.



Joonis 12



Joonis 13

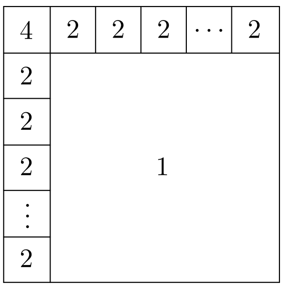
Märkus. Teine võimalus üleminekuks $(4m+1) \times (4m+1)$ ruudustiku katmiselt $\big(4(m+1)) + 1\big) \times \big(4(m+1)) + 1\big)$ ruudustiku katmisele on järgmine: lisame $(4m + 1) \times (4m + 1)$ ruudustiku vasaku ja ülemise serva äärde $4 \times 4m$ ristküliku (mida saab katta 2×4 osade kaupa) ning vasakusse ülemisse nurka väljalõigatud nurgaruuduga 5×5 ruudu (mille katmise võimalus on näidatud joonisel 12).

XII klass

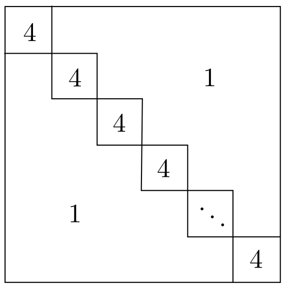
1. *Vastus:* nii Jüril kui ka Maril on kaartide paigutamiseks 4^n võimalust.
   Lahendus 1. Paneme tähele, et kui mingile ruudule on mistahes asendis

kaart juba paigutatud, siis selle ruudu suvalisele naaberruudule (temaga ühist külge omavale ruudule) kaardi paigutamiseks on nii Jüril kui ka Maril 2 võimalust. Kui aga mingis 2×2 ruudus on kolm kaarti juba paigutatud, siis sinna neljanda kaardi paigutamiseks on nii Jüril kui ka Maril ainult üks võimalus. Joonisel 14 on näidatud kaardi paigutamise võimaluste arvud ruudustiku iga ruudu jaoks, kui katta kaartidega kõigepealt ruudustiku ülemine rida vasakult paremale, seejärel vasakpoolne veerg ülevalt alla ning jätkata siis ülejäänud $(n-1)\times(n-1)$ ruudustiku katmist analoogilises järjekorras. Kokku on nii Jüril kui ka Maril kaartide paigutamiseks niisiis $4\cdot 2^{2(n-1)} = 4\cdot 4^{n-1} = 4^n$ võimalust.

Lahendus 2. Paneme tähele, et suvalises 2×2 ruudus saab nii Jüri kui ka Mari kahele ühist külge mitteomavale ruudule kaardid paigutada teineteisest sõltumatult, ning nende kaartide mistahes paigutuse korral on kummalgi neist ülejäänud kahele ruudule kaartide paigutamiseks üksainus võimalus. Järelikult saab nii Jüri kui ka Mari paigutada n kaarti mistahes viisil ruudustiku ühel diagonaalil paiknevatele ruutudele (selleks on 4^n võimalust) ning seejärel on kummalgi neist ülejäänud ruutude kaartidega katmiseks üksainus võimalus (vt. joonist 15).



Joonis 14



Joonis 15

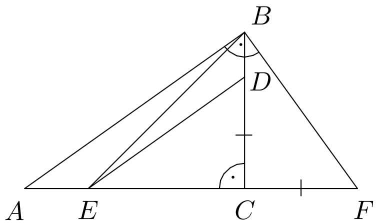
Lahendus 3. Teeme induktsiooni n järgi. Kui $n=1$, siis on ilmselt nii Maril kui ka Jüril ainsa kaardi paigutamiseks $4=4^1$ võimalust. Lisame nüüd sobival viisil kaartidega kaetud $n\times n$ ruudule paremale ühe veeru ja alla ühe rea. Lisatud veeru kõige ülemisele ruudule saab nii Mari kui ka Jüri paigutada kaardi 2 viisil, sest selle vasak äär peab olema sama värvi (vastavalt erinevat värvi) võrreldes temast vasakul asuva kaardiga. Järgmise kaardi asend on kahe naaberkülje värviga juba üheselt määratud jne., lisatud veeru ja rea ühisele ruudule jätame kaardi esialgu paigutamata. Alumise rea vasakpoolse kaardi paigutamiseks on Maril ja Jüril kummalgi samuti 2 võimalust ning kõikide temast paremal asuvate kaartide asend (k.a. lisatud veeru ja rea ühisele ruudule paigutatav kaart) on nüüd üheselt määratud. Kokku on kummalgi võimalusi $(n+1)\times(n+1)$ ruudu katmiseks seega $4^n\cdot 2\cdot 2 = 4^{n+1}$.

2. *Vastus:* selle võrrandi lahendid on $x = 4$ ja $x = 16$.

Paneme kõigepealt tähele, et arvud 4 ja 16 rahuldavad antud võrrandit: $\sqrt{4} = 2 = \log_2 4$ ning $\sqrt{16} = 4 = \log_2 16$. Näitamaks, et rohkem lahendeid ei ole, uurime funktsiooni $f(x) = \sqrt{x} - \log_2 x$, mille nullkohtadeks on parajasti antud võrrandi lahendid. Leiame

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\ln 2} = \frac{\sqrt{x}\ln 2 - 2}{2x\ln 2} ,$$

kust näeme, et $f'(x) = 0$ parajasti siis, kui $\sqrt{x}\ln 2 - 2 = 0$, ehk $\sqrt{x} = \frac{2}{\ln 2}$. Seega $x = \left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2$ on funktsiooni $f(x)$ tuletise ainus nullkoht. Et nii funktsioon $f(x)$ kui ka selle tuletis on oma määramispiirkonnas $(0,\infty)$ pidevad, siis peab funktsiooni $f(x)$ iga kahe nullkoha vahel paiknema üks ekstreemumkoht, mis on selle funktsiooni tuletise nullkohaks. Järelikult ei saa funktsioonil $f(x)$ olla üle kahe nullkoha ning 4 ja 16 on antud võrrandi ainsad lahendid.



Joonis 16

3. *Vastus:* 45°.

Lahendus 1. Võtame kiirel AC niisuguse punkti F, et $\angle ABF = 90^\circ$ (vt. joonist 16). Siis punkt C paikneb lõigul AF ning Eukleidese teoreemist saame $|AC|\cdot|CF| = |BC|^2$. Järelikult $|CD| = |CF|$. Et $\angle DCE = \angle FCB = 90^\circ$ ja

$$\angle CDE = \angle CBA = 90^\circ - \angle BAC = \angle CFB ,$$

siis kolmnurgad CDE ja CFB on võrdsed ning $|CE| = |CB|$. Et

$\angle ECB = 90^\circ$, siis on kolmnurk ECB täisnurkne ja võrdhaarne ning tema alusnurga BEC suurus on 45°.

Lahendus 2. Paneme tähele, et kolmnurk EDC on sarnane kolmnurgaga ABC, kusjuures sarnasustegur on $k = \frac{|DC|}{|BC|}$. Ülesandes antud võrdusest saame $\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|}$. Järelikult

$$|EC| = |AC| \cdot k = |AC| \cdot \frac{|BC|}{|AC|} = |BC| \, .$$

Niisiis on kolmnurk BCE täisnurkne ja võrdkülgne ning $\angle CEB = 45$.

4. Olgu $d_1 = 1$, d_2, $\ldots$, d_{k-1}, $d_k = n$ positiivse täisarvu n kõik positiivsed jagajad loetletuna kasvavas järjekorras, siis $d_1 = \frac{n}{d_k}$, $d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}$, $\ldots$. Tähistades arvu n positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ ning nende pöördarvude summa $\sigma'(n)$, saame

$$\begin{aligned}\sigma'(n) &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{d_k}{n} + \frac{d_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{d_1}{n} = \\ &= \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{n} = \frac{\sigma(n)}{n} \, .\end{aligned}$$

a) Oletame, et mingi algarvu p jaoks leidub selline positiivne täisarv $a \neq p$, et $\frac{\sigma(a)}{a} = \sigma'(a) = \sigma'(p) = \frac{1+p}{p}$. Et murd $\frac{1+p}{p}$ on taandumatu, siis p peab olema arvu a jagaja. Seega arvu a jagajateks on arvu p jagajad 1 ja p ning veel vähemalt arv a ise, mistõttu $\sigma'(a) > \sigma'(p)$ — vastuolu.

b) Olgu a suvaline positiivne täisarv ning p selline algarv, mis ei ole a jagaja. Veendume, et siis $\sigma'(ap) = \sigma'(a) \cdot \sigma'(p)$. Tõepoolest, arvestades esimeses lõigus tõestatut piisab näidata, et $\sigma(ap) = \sigma(a) \cdot \sigma(p)$. Arvu ap jagajateks on aga parajasti arvu a jagajad ja nende korrutised arvuga p, mistõttu

$$\begin{aligned}\sigma(a) \cdot \sigma(p) &= (d_1 + d_2 + \ldots + d_k) \cdot (1 + p) = \\ &= (d_1 + d_2 + \ldots + d_k) + (d_1 p + d_2 p + \ldots + d_k p) = \\ &= \sigma(ap) \, .\end{aligned}$$

Niisiis piisab leida sellised arvud a ja b, et $a \neq b$ ning $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ — siis ka $ap \neq bp$ ning $\sigma'(ap) = \sigma'(bp)$ mistahes sellise algarvu p korral, mis ei ole ei a ega b jagaja, ning järelikult on kõik sellised arvud ap mitteüksildased. Sobivad arvud on näiteks $a = 6$ ja $b = 28$:

$$\sigma'(6) = \frac{1+2+3+6}{6} = 2 = \frac{1+2+4+7+14+28}{28} = \sigma'(28)\ .$$

5. a) Olgu 9 piletis märgitud järgmised arvud.

$$\begin{array}{lll} (1,2,3,4,5,6) & (10,11,12,13,14,15) & (19,20,21,22,23,24) \\ (1,2,3,7,8,9) & (10,11,12,16,17,18) & (25,26,27,28,29,30) \\ (4,5,6,7,8,9) & (13,14,15,16,17,18) & (31,32,33,34,35,36) \end{array}$$

Siis selleks, et ükski esimeses tulbas näidatud kolmest piletist ei võidaks, peavad kuuest väljaloositud arvust vähemalt kaks olema hulgast $\{1,2,\ldots,9\}$. Et ükski järgmises tulbas näidatud kolmest piletist ei võidaks, peavad vähemalt kaks väljaloositud arvu olema hulgast $\{10,\ldots,18\}$. Et ükski viimases tulbas näidatud kolmest piletist ei võidaks, peab väljaloositud arvude seas olema veel kolm arvu hulgast $\{19,\ldots,36\}$. Kuna välja loositakse ainult kuus arvu, siis ei saa kõik need tingimused korraga täidetud olla ning vaadeldavate piletite seas leidub kindlasti võitev pilet.

b) Kui mõni arvudest on märgitud kolmes piletis kaheksast, siis võib väljaloositud arvude komplekt sisaldada selle arvu ja lisaks ülejäänud viiest piletist igaühest ühe märgitud arvu, ning ükski kaheksast piletist ei võida. Vaatleme nüüd juhtu, kus iga arv on märgitud ülimalt kahes piletis kaheksast. Siis 48 piletites kokku märgitud arvu seas peavad vähemalt 12 arvu esinema kaks korda (sest üldse on 36 erinevat arvu). Üldisust kitsendamata olgu need arvud 1, 2, ..., 12. Vaatleme kaht piletit (tähistame need A ja B), kus on märgitud arv 1. Et piletites A ja B on kokku märgitud veel ülimalt 10 erinevat arvu, siis üks arvudest 2, ..., 12 ei ole märgitud kummaski neist piletitest ning peab seega olema märgitud kahes ülejäänud kuuest piletist — üldisust kitsendamata olgu see arv 12 ning need kaks piletit C ja D. Siis aga võib väljaloositud arvude komplekt sisaldada arvud 1, 12 ja lisaks ülejäänud neljast piletist (mis ei ole A, B, C ega D) igaühest ühe märgitud arvu, ning ükski kaheksast piletist ei võida.