Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

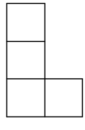
1. Ringjoonel võetakse punktid A_1, A_2, …, A_m ja B_2, B_3, …, B_n nii, et $A_1A_2\ldots A_m$ on korrapärane m-nurk ja $A_1B_2\ldots B_n$ on korrapärane n-nurk, kusjuures $n > m$ ning punkt B_2 paikneb punktide A_1 ja A_2 vahel. Leia nurga $B_2A_1A_2$ suurus.

2. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, mille korral
$$n + \left[\frac{n}{6}\right] \neq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right].$$
Siin $[x]$ tähistab reaalarvu x täisosa, s.t. suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust x.

3. Ristkülikus $ABCD$, kus $|AB| < 2|AD|$, on E külje AB keskpunkt ning F selline punkt lõigul CE, et $\angle CFD = 90^\circ$. Tõesta, et kolmnurk FAD on võrdhaarne.

4. Nõia-Ella asus segama nõiarohtu, mis koosneb 140 ml põdrasamblateest, 160 ml kärbseseeneleotisest ja 50 ml hundijalaveest. Ta võttis tühja 350 ml pudeli, valas sinna 140 ml põdrasamblateed ning asus lisama kärbseseeneleotist, kui tema musta kassi Mefisto kräunumine teda eksitas. Seetõttu valas Nõia-Ella kärbseseeneleotist pudelisse kogemata liiga palju ning märkas eksitust alles hiljem, kui pudel sai täis enne, kui kõik 50 ml hundijalavett oli juurde valatud. Nõia-Ella tegi kiire arvutuse, loksutas siis pudeli sisu hoolega segamini, valas osa rohtu pudelist välja ning lisas juurde sobivas vahekorras võetud põdrasamblatee ja hundijalavee segu, kuni pudel sai jälle täis ning selles olev nõiarohi vastas täpselt vajalikule retseptile. Millises vahekorras põdrasamblatee ja hundijalavee segu Nõia-Ella pudelisse lisas?

5. Kas $n\times n$ ruudustikku, millest on välja lõigatud keskmine ruut, on võimalik katta joonisel näidatud papist kujunditega (iga kujund katab 4 ruutu; kujundeid võib pöörata ja ümber keerata), kui



   a) $n = 5$;
   b) $n = 2003$?

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

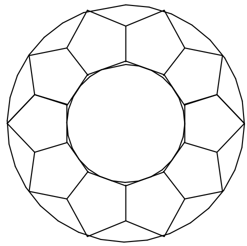
lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Joonisel on kujutatud 10 ühesuurust korrapärast viisnurka, kusjuures igal kahel kõrvutiasetseval viisnurgal on ühine külg. Väiksem ringjoon puutub iga viisnurga üht külge ning suurem ringjoon läbib nende külgede vastastippe. Leia suurema ringjoonega piiratud ringi pindala, kui väiksema ringjoonega piiratud ringi pindala on 1.



2. Leia avaldise $\dfrac{m^2+n^2}{mn}$, kus m ja n on täisarvud, kõik võimalikud täisarvulised väärtused.

3. Teravnurkses kolmnurgas ABC on kõik nurgad suuremad kui 45°. Olgu AM ja BN selle kolmnurga kõrgused. Lõikudel MA ja NB valitakse vastavalt punktid X ja Y nii, et $|MX| = |MB|$ ja $|NY| = |NA|$. Tõesta, et lõigud MN ja XY on paralleelsed.

4. Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

5. Mängu *Clobber* mängitakse kahekesi $2k$ kõrvutiasetsevast ruudust koosneval ribal. Algul on igal ruudul üks nupp, kusjuures vastasmängijate nupud paiknevad vaheldumisi. Igal käigul nihutab mängija ühe oma nupu sellisele naaberruudule, kus paikneb vastase nupp, ning võtab selle vastase nupu laualt ära. Käike tehakse kordamööda ning võidab mängija, kelle käigu järel vastane ei saa enam käiku teha.

   Tõesta, et kui mingi k korral leidub võitev strateegia alustaja vastasmängijal, siis $k+1$ ja $k+2$ korral leidub võitev strateegia alustajal.

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Euroopa-reisile läinud Juhan seisab kiirtee ääres ja jälgib möödasõitvaid autosid. Mööda kiirteed sõidavad ühtlaste kiirustega ühes suunas Opel ja Trabant ning vastassuunas Mercedes. Hetkel, kui Trabant möödub Juhanist, asuvad Opel ja Mercedes temast vastassuundades võrdsel kaugusel. Hetkel, kui Mercedes möödub Juhanist, asuvad Opel ja Trabant temast vastassuundades võrdsel kaugusel. Tõesta, et hetkel, kui Opel möödub Juhanist, asuvad Mercedes ja Trabant temast vastassuundades võrdsel kaugusel.

2. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

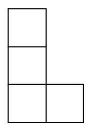
$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{3}\,.$$

   Millal kehtib siin võrdus?

3. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis. On teada, et punktid A, B_1, A_1 ja B paiknevad ühel ringjoonel ning punktid B, C_1, B_1 ja C paiknevad ühel ringjoonel. Tõesta, et
   a) punktid C, A_1, C_1 ja A paiknevad ühel ringjoonel;
   b) lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused.

4. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve n, mille korral $\sqrt{n}$ ei ole täisarv ning n jagub arvuga $[\sqrt{n}]$. (Siin $[x]$ tähistab reaalarvu x täisosa, s.t. suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust x.)

5. Milliste positiivsete täisarvude n korral on võimalik katta $(2n+1) \times (2n+1)$ ruudustik, millest on välja lõigatud üks nurgaruut, joonisel näidatud papist kujunditega (iga kujund katab 4 ruutu; kujundeid võib pöörata ja ümber keerata)?



Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

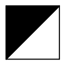
lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Jüri ja Mari tahavad kumbki katta $n \times n$ ruudustiku joonisel näidatud kaartidega (iga kaart katab ühe ruudu). Jüri tahab seda teha nii, et iga kahe üksteise kõrval paikneva kaardi kõrvutiasetsevad osad oleksid eri värvi, Mari aga nii, et iga kahe üksteise kõrval paikneva kaardi kõrvutiasetsevad osad oleksid sama värvi. Kui palju erinevaid võimalusi ruudustiku soovitud viisil kaartidega katmiseks on Jüril ja kui palju Maril?



2. Lahenda võrrand $\sqrt{x} = \log_2 x$.

3. Kolmnurgas ABC on $\angle C = 90°$. Kiirel CB võetakse punkt D nii, et $|AC| \cdot |CD| = |BC|^2$. Läbi punkti D paralleelselt hüpotenuusiga AB tõmmatud sirge lõikab kiirt CA punktis E. Leia nurga BEC suurus.

4. Nimetame positiivset täisarvu *üksildaseks*, kui selle positiivsete jagajate (1 ja arv ise kaasa arvatud) pöördarvude summa ei võrdu ühegi teise positiivse täisarvu positiivsete jagajate pöördarvude summaga. Tõesta, et
   a) kõik algarvud on üksildased;
   b) leidub lõpmata palju mitteüksildasi positiivseid täisarve.

5. Lotomängus peab mängija märkima piletil 6 arvu 36-st. Loosimisel valitakse neist 36-st arvust juhuslikult välja 6 arvu ning pilet võidab, kui sellel ükski väljavalitud arv ei ole märgitud. Tõesta, et
   a) on võimalik märkida 9 piletil arvud nii, et loosimisel vähemalt üks neist piletitest kindlasti võidaks;
   b) ei ole võimalik märkida 8 piletil arve nii, et loosimisel vähemalt üks neist piletitest kindlasti võidaks.