XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ берут соответственно точки K и L так, что $\angle AKB = \angle AKL$. Найти величину угла KAL.

2. Пусть $\overline{xy}$ обозначает двузначное число с цифрами x и y. Найдутся ли такие различные цифры a, b и c, все отличны от 0, что число $\overline{ab}$ делится на c, число $\overline{bc}$ делится на a и число $\overline{ca}$ делится на b?

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различные действительные числа и пусть среди всех взятых попарно сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ есть m различных чисел. Найти наименьшее возможное значение для m.

4. Маша пишет на доске 5 чисел. Затем Юра может ход за ходом изменять эти числа, стирая за один ход одно число и записывая вместо него число $x+y-z$, где x, y и z некоторые три из четырех оставшихся чисел на доске. Сможет ли Юра при любых написанныш Машей числах действовать так, что после конечного числа описанных выше ходов на доске будет пять одинаковых чисел?

5. На острове жили $n > 1$ аборигенов, каждый из которых говорил либо только правду, либо только ложь, причем у каждого аборигена был среди остальных аборигенов по крайней мере один друг. Прибывший на остров новый губернатор организовал опрос, в котором каждый абориген должен был ответить на вопрос, кого больше среди его друзей: лгунов или правдивых, или тех и других поровну. Все аборигены на этот вопрос ответили, что среди их друзей больше лгунов, чем правдивых. После этого губернатор приказал казнить одного аборигена, заподозренного во лжи, и провел новый опрос, в котором аборигены должны были снова ответить на тот же вопрос. На этот раз все аборигены ответили, что среди их друзей правдивых больше, чем лгунов.

   Был ли казненный абориген лгуном или правдивым, и кого больше среди оставшихся аборигенов: лгунов или правдивых (предполагаем, что правдивость аборигенов и дружеские отношения между ними не изменились между двумя опросами)?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Наибольший общий делитель d и наименьшее общее кратное v положительных целых чисел m и n удовлетворяют условию $3m + n = 3v + d$. Доказать, что число m делится на число n.

2. Пусть ABC непрямоугольный треугольник и H точка пересечения его высот. Доказать, что треугольник ABH является остроугольным тогда и только тогда, когда $\angle ACB$ тупой.

3. Коля находит для положительных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ всевозможные попарные произведения $a_i a_j$, суммы $a_i + a_j$ и модули разностей $|a_i - a_j|$, где $i \neq j$. Сколько различных нечетных чисел может быть максимально среди найденных Колей чисел?

4. Найти максимальную длину такой ломаной, концами которой являются две противоположные вершины единичного куба, а звеньями — ребра и диагонали граней этого куба, причем ломанаја не пересекает самого себя и не проходит ни через одну вершину куба более одного раза.

5. Учитель пишет у каждого бокового ребра доски число 1. Первый ученик пишет между ними дополнительно число 2; каждый следующий ученик пишет дополнительно между каждыми двумя находящимися рядом на доске числами их сумму (после второго ученика на доске окажутся числа $1, 3, 2, 3, 1$, после третьего ученика числа $1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1$, и т.д.) Найти сумму всех чисел на доске после того, как n учеников дописали на доску числа.

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Для каких действительных чисел a уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет четыре действительных решения, которые являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии?

2. Найти площадь равностороннего треугольника, если в его внутренней области находится точка, расстояния от которой до вершин треугольника равны 3, 4 и 5.

3. Учитель пишет на доске 2002-значное число $999\ldots9$. Первый ученик раскладывает это число на произведение двух, больших 1, множителей a и b, стирает затем число на доске и пишет вместо него два таких числа a' и b', что $|a-a'|=2$ и $|b-b'|=2$. Второй ученик выбирает одно из чисел на доске, раскладывает это число на произведение двух, больших 1, множителей c и d, стирает с доски выбранное число и пишет вместо него два таких числа c' и d', что $|c-c'|=2$ и $|d-d'|=2$. Третий ученик выбирает в свою очередь одно из чисел на доске и заменяет его на два новых числа, полученных по тому же правилу, и т.д. Возможно ли, что после того, как некоторое число учеников побывает у доски, все находящиеся на доске числа будут равны 9?

4. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 такие действительные числа, что не менее чем N из попарно взятых сумм $a_i + a_j$, где $i < j$, являются целыми числами. Найти наибольшее число N, для которого возможно, что не все такие суммы $a_i + a_j$ являются целыми числами.

5. Коля построил робота, который двигается вдоль дорожки, имеющей форму правильного восьмиугольника, и проходит одну сторону восьмиугольника ровно за 1 минуту. Робот начинает движение из вершины A восьмиугольника и далее, достигнув любую из вершин, может либо двигаться дальше в том же направлении, либо развернуться и двигаться в обратном направлении. Сколькими различными способами может двигаться робот, так чтобы через n минут он оказался в вершине B, противоположной вершине A?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Петя, Юра, Катя и Маша стоят перед входом в темный туннель. На четверых у них имеется один факел, без которого ни один из них не решается находиться в туннеле, кроме того туннель такой узкий, что вместе там могут двигаться не более двух человек. Петя может проходить туннель за 1 минуту, Юра за 2 минуты, Катя за 5 минут и Маша за 10 минут. Найти наименьшее возможное время, за которое все пройдут через туннель.

2. Может ли число, состоящее только из цифр 2 и 0, быть k-ой степенью некоторого положительного целого числа, где $k \geqslant 2$?

3. Доказать, что положительные действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенству

$$2(a^4 + b^4 + c^4) < (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

тогда и только тогда, когда найдется треугольник с длинами сторон a, b и c.

4. Все вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$ находятся на окружности ω. Лучи AD и BC пересекаются в точке K, а лучи AB и DC пересекаются в точке L. Доказать, что описанная около треугольника AKL окружность касается окружности ω тогда и только тогда, когда описанная около треугольника CKL окружность касается окружности ω.

5. На дне рождения Коли между гостями разыгрывают некоторое число одинаковых призов так, чтобы каждый гость может получить не более чем один приз. Известно, что если призов было бы на один меньше чем в действительности, то возможных распределений призов среди гостей было бы на 50% меньше чем в действительности; если же призов было бы на один больше чем в действительности, то возможных распределений призов среди гостей было бы на 50% больше чем в действительности. Найти число возможных распределений призов.