Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* $45°$.

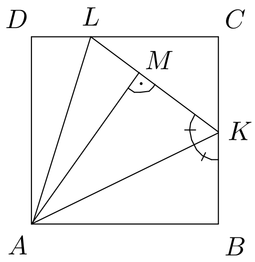
   Olgu M tipust A lõigule KL tõmmatud ristlõigu aluspunkt (vt. joonist 1). Täisnurksed kolmnurgad ABK ja AMK on kongruentsed, sest neil on ühine hüpotenuus AK ja üks paar võrdse suurusega teravnurki. Seega $|AM| = |AB| = |AD|$, s.t. täisnurksed kolmnurgad AML ja ADL on samuti kongruentsed ning

$$\angle KAL = \angle KAM + \angle LAM = \angle KAB + \angle LAD\ ,$$

   kust

$$2\angle KAL = \angle KAM + \angle LAM + \angle KAB + \angle LAD = 90°$$

   ning $\angle KAL = 45°$.



Joonis 1

2. *Vastus:* ei.

   Kui üks ülesande tingimusi rahuldavatest numbritest a, b ja c on paaris, siis peavad need numbrid kõik olema paaris (tõepoolest, kui näiteks c on paaris, siis peab $\overline{ab}$ olema paaris, kust b on paaris; nüüd peab ka $\overline{ca}$ olema paaris, kust a on samuti paaris). Siis aga on ka $\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{b}{2}$ ja $\dfrac{c}{2}$ ülesande tingimusi rahuldavad numbrid. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et need numbrid on kõik paaritud. Paneme ka tähele, et ükski neist numbritest ei saa olla 5, sest siis peaksid ka kaks ülejäänut olema 5. Niisiis piisab vaadelda numbreid 1, 3, 7 ja 9 ning üks numbritest a, b ja c peab olema 3 või 9. Ülejäänud kahest numbrist moodustatud arv peab seega jaguma 3-ga, mis aga on võimalik ainult juhul, kui need kaks numbrit on 3 ja 9. Saadud vastuolu näitab, et ülesande tingimustele vastavaid numbreid a, b ja c ei leidu.

3. *Vastus:* $2n-3$.

   Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Siis

   $$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n \ ,$$

   s.t. erinevaid summasid on igal juhul vähemalt $2n-3$. Võttes arvudeks a_i arvud 1, 2, ..., n näeme, et minimaalne summa on $1+2=3$ ja maksimaalne $(n-1)+n = 2n-1$, s.t. erinevaid summasid on sel juhul täpselt $2n-3$.

4. *Vastus:* jah.

   Olgu Mari kirjutatud arvud a, b, c, d ja e (need ei tarvitse olla kõik erinevad). Kõigepealt saab Jüri arvud a ja b asendada võrdsete arvudega $x = c + d - e$. Seejärel saab ta arvud c ja d asendada arvudega $e + x - x = e$ ning lõpuks arvud x asendada arvudega $e + e - e = e$:

   $$(a, b, c, d, e) \to (x, x, c, d, e) \to (x, x, e, e, e) \to (e, e, e, e, e) \ .$$

5. *Vastus:* hukati tõerääkija ja seejärel jäid saarele ainult valetajad, s.t. valetajaid on pärast hukkamist rohkem kui tõerääkijaid.

   Kui alguses oleksid saarel olnud ainult valetajad, oleksid ka nende sõbrad olnud kõik valetajad, s.t. nende ütlused esimesel küsitlusel oleksid olnud tõesed — vastuolu.

   Kui aga pärast hukkamist oleks saarel mõni tõerääkija, siis pidanuks tema ütlused nii esimesel kui ka teisel küsitlusel olema tõesed — see pole aga võimalik, sest ühe pärismaalase hukkamise tulemusena ei saa kellegi valetajatest ja tõerääkijatest sõprade arvude vahe muuta märki.

X klass

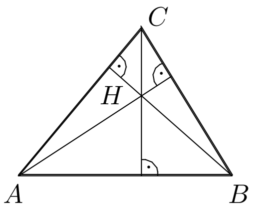
1. Olgu $m = dm'$ ja $n = dn'$, kus $\text{SÜT}\,(m', n') = 1$. Siis $v = m'n'd$ ning ülesande tingimusest saame $3m'd + n'd = 3m'n'd + d$, kust $3m' + n' = 3m'n' + 1$ ehk $(3m' - 1)(n' - 1) = 0$. Et $3m' - 1 \neq 0$, siis $n' - 1 = 0$ ning seega $n = d$ on arvu m jagaja.

2. Kui H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, siis $AC \perp BH$ ja $BC \perp AH$, s.t. C on kolmnurga ABH kõrguste lõikepunkt. Vaatleme nüüd kolme võimalikku juhtu.

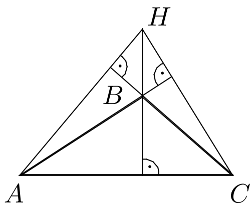
   (1) Kolmnurk ABC on teravnurkne (vt. joonist 2). Siis punkt H asub kolmnurga ABC sees ning seega punkt C asub kolmnurgast ABH väljaspool, mistõttu kolmnurk ABH on nürinurkne.

   (2) Kolmnurk ABC on nürinurkne ja $\angle ACB$ on teravnurk. Üldisust kitsendamata eeldame, et nürinurk on tipu B juures (vt. joonist 3). Et punkt H asub kolmnurga ABC pikimale küljele AC tõmmatud kõrguse pikendusel üle tipu B, siis punktid C ja H asuvad sirgest AB erineval pool. Seega punkt C asub kolmnurgast ABH väljaspool, mistõttu kolmnurk ABH on nürinurkne.

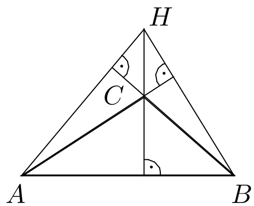
   (3) Kolmnurk ABC on nürinurkne ja $\angle ACB$ on nürinurk (vt. joonist 4). Siis punkt H asub kolmnurga ABC küljele AB tõmmatud kõrguse pikendusel üle tipu C. Seega punkt C asub kolmnurga ABH sees, mistõttu kolmnurk ABH on teravnurkne.



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

3. *Vastus:* 30.

   Kui arvude a_i hulgas on m paaritut arvu, siis Juku leitud paarituid arve on maksimaalselt

$$f(m) = \frac{m(m-1)}{2} + 2 \cdot m(7-m) = \frac{1}{2}(m^2 - m + 28m - 4m^2) =$$

$$= \frac{3}{2}m(9-m) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{81}{4} - \left(\frac{9}{2}-m\right)^2\right)$$

ning $f(m)$ maksimaalne väärtus on $f(4) = f(5) = 30$.

Jääb üle näidata, et need paaritud arvud võivad olla kõik erinevad. Selleks võime võtta näiteks $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ ja $a_3 = 6$ ning $a_4 = 25 = 5^2$, $a_5 = 125 = 5^3$, $a_6 = 15625 = 5^6$ ja $a_7 = 9765625 = 5^{10}$. Siis nende arvude paaritud vahed on

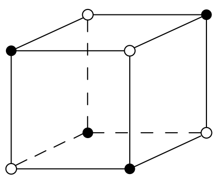
19, 21, 23, 119, 121, 123, 15619, 15621, 15623,
9765619, 9765621, 9765623;

nende arvude paaritud summad on

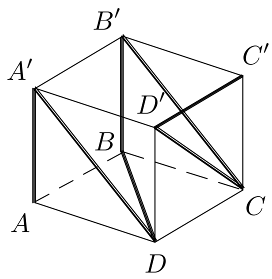
27, 29, 31, 127, 129, 131, 15627, 15629, 15631,
9765627, 9765629, 9765631

ning nende arvude paaritud korrutised on

$5^5, 5^8, 5^9, 5^{12}, 5^{13}, 5^{16}$.



Joonis 5



Joonis 6

4. *Vastus:* $3 + 4\sqrt{2}$.

Vaadeldava murdjoone lülideks on kuubi servad pikkusega 1 ja kuubi tahkude diagonaalid pikkusega $\sqrt{2}$. Et kuubil on 8 tippu ning murdjoon ei läbi ühtegi tippu rohkem kui üks kord, siis saab tal olla ülimalt 7 lüli. Värvides kuubi tipud kahe värviga nii, et naabertipud oleksid erinevat värvi (vt. joonist 5), näeme, et kuubi vastastipud on erinevat värvi ning mistahes tahu vastastipud on sama värvi — seega peab murdjoon sisaldama paaritu arvu kuubi servi. Ülaltoodud värvimisest järeldub ka, et murdjoon ei saa sisaldada järjest üle kolme lüli, mis on kuubi tahkude diagonaalid (kuna nende otspunktid oleksid siis kõik ühte värvi ja kuubil on ainult 4 üht värvi tippu). Kui nüüd murdjoon sisaldaks ühe kuubi serva ja kuus tahkude diagonaali, siis peaks selle kummaski otsas olema kolm lüli, mis on kuubi tahkude diagonaalid — on lihtne kontrollida, et nende lülide paigutamiseks on sümmeetria täpsusega üksainus võimalus ning saadavad murdjoone osad ei ole ühendatavad kuubi servaga. Seega ei saa vaadeldav murdjoon olla pikem kui $3+4\sqrt{2}$; sellise pikkusega sobiv murdjoon on näidatud joonisel 6.

5. *Vastus:* 3^n+1.

   Olgu S_n pärast n-ndat õpilast tahvlil olevate arvude summa. Tõestame induktsiooniga, et $S_n=3^n+1$. Kui $n=0$, siis $S_0=2=3^0+1$. Eeldame nüüd, et k õpilase järel on tahvlil olevate arvude summa 3^k+1. Siis $k+1$ õpilase järel on tahvlil kõik k õpilase järel tahvlil olnud arvud ning lisaks $(k+1)$. õpilase kirjutatud summad — seejuures iga k õpilase järel tahvlil olnud arv kuulub täpselt kahe sellise summa koosseisu, välja arvatud kaks äärmist arvu 1, mis kuuluvad ainult ühe sellise summa koosseisu. Seega

$$S_{k+1}=S_k+2S_k-2=3(3^k+1)-2=3^{k+1}+1\ .$$

XI klass

1. *Vastus:* $a=-\dfrac{82}{9}$.

   Paneme tähele, et muutuja vahetusega $t=x^4$ saame ruutvõrrandi t suhtes, ning võrrandil $x^4=t_0$ on ülimalt kaks lahendit, mis on sel juhul teineteise vastandarvud. Seega juhul, kui võrrandil $x^8+ax^4+1=0$ on neli lahendit, peavad need olema kujul $\pm x_0$ ja $\pm x_1$. Eeldades üldisust kitsendamata, et $x_1>x_0$, näeme, et need lahendid on aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks siis ja ainult siis, kui $x_1=3x_0$. Võrrandi t^2+at+1 lahenditeks on siis x_0^4 ja $81x_0^4$ ning Viete'i valemitest saame, et $81x_0^8=1$, kust $x_0^4=\dfrac{1}{9}$, ning $a=-82x_0^4=-\dfrac{82}{9}$.

2. *Vastus:* $\dfrac{36+25\sqrt{3}}{4}$.

Olgu vaatluse all kolmnurk ABC ja punkt P ning olgu $|PA| = 3$, $|PB| = 4$ ja $|PC| = 5$. Pöörame kolmnurka 60° võrra ümber tipu C, nii et tipp A asetub tipu B kohale ja tipp B kujutub punktiks B' (vt. joonist 7). Punkt P kujutub siis punktiks P', kusjuures $|P'B| = |PA| = 3$, $|P'B'| = |PB| = 4$ ja $|P'C| = |PC| = 5$. Et lõikude CP ja CP' vaheline nurk on 60°, siis on kolmnurk CPP' võrdkülgne, s.t. $|PP'| = 5$. Nüüd

$$|PB|^2 + |P'B|^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = |PP'|^2 ,$$

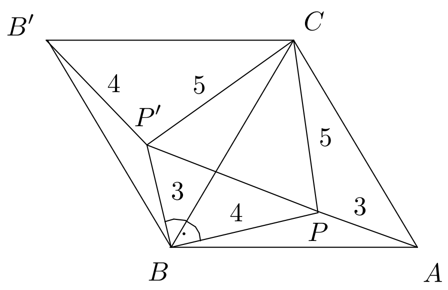
mistõttu $\angle PBP' = 90^\circ$. Et kolmnurgad APB ja $BP'B'$ on kongruentsed, siis

$$\angle ABP + \angle BAP = \angle ABP + \angle B'BP' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

ning $\angle APB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Koosinusteoreemist kolmnurgas APB saame nüüd

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= |AP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \cos \angle APB = \\ &= 9 + 16 + 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

ning otsitav pindala on $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB|^2 = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$.



Joonis 7

3. *Vastus:* ei.

Alguses tahvlile kirjutatud 2002-kohaline arv $999\ldots9$ annab 4-ga jagamisel jäägi 3, arv 9 aga jäägi 1. Kui $N = ab$ ning N annab 4-ga jagamisel jäägi 3, siis üks arvudest a ja b annab 4-ga jagamisel jäägi 1 ja teine jäägi 3 ning arvu N asemele tahvlile kirjutatavatest arvudest a' ja b' (kus $|a - a'| = 2$ ja $|b - b'| = 2$) annab samuti üks 4-ga jagamisel jäägi 1 ja teine jäägi 3. Seega on iga sammu järel tahvlil vähemalt üks arv, mis annab 4-ga jagamisel jäägi 3, mistõttu ei ole võimalik, et mingi arvu sammude järel oleksid seal ainult arvud 9.

4. *Vastus:* 6.

Võttes arvudeks a_i neli täisarvu ja ühe mitte-täisarvu, saame 6 täisarvulist ja 4 mitte-täisarvulist summat. Tähistagu edaspidi $\{c\}$ arvu c murdosa, s.t. $c = c - [c]$, kus c on arvu c täisosa, ning $0 \leqslant \{c\} < 1$. Et tõestada $N = 6$ maksimaalsust, paneme tähele, et:

(a) kui $\{a\} \neq \{b\}$ ja c on suvaline reaalarv, siis summadest $c + a$ ja $c + b$ ülimalt üks võib olla täisarv;

(b) kui $a = b$, siis $a + b$ on täisarv siis ja ainult siis, kui $\{a\} = 0$ või $\{a\} = 0{,}5$;

(c) kui $\{a\} \neq \{b\}$ ja $a + b$ on täisarv, siis $\{a\}$ ja $\{b\}$ ei ole 0 ega $0{,}5$.

Vaatleme nüüd 5-elemendilise hulga erinevaid võimalikke tükeldusi alamhulkadeks, kus ühte alamhulka kuuluvad sama murdosaga arvud.

(1) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = \{a_3\} = \{a_4\} = \{a_5\}$ ning summade $a_i + a_j$ hulgas on täisarve, siis vastavalt punktile (b) on need summad kõik täisarvud.

(2) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = \{a_3\} = \{a_4\} = x$ ning $\{a_5\} \neq x$, siis juhul, kui x ei ole 0 ega $0{,}5$, on meil vastavalt punktile (b) ülimalt 4 täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ täisarvulist summat.

(3) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = \{a_3\} = x$ ning $\{a_4\} = \{a_5\} = y \neq x$, siis juhul, kui x ega y ei ole 0 ega $0{,}5$, on meil vastavalt punktile (b) ülimalt $2 \cdot 3 = 6$ täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $2 + 3 = 5$ täisarvulist summat.

(4) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = \{a_3\} = x$ ning $\{a_4\} = y$ ja $\{a_5\} = z$ (kus x, y ja z on kõik erinevad), siis juhul, kui x ei ole 0 ega $0{,}5$, on meil vastavalt punktidele (a) ja (b) ülimalt 3 täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $1 + 3 = 4$ täisarvulist summat.

(5) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = x$ ning $\{a_3\} = \{a_4\} = y$ ja $\{a_5\} = z$ (kus x, y ja z on kõik erinevad), siis juhul, kui x ega y ei ole 0 ega $0{,}5$,

on meil vastavalt punktidele (a) ja (b) ülimalt $2 \cdot 2 = 4$ täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $2 + 2 = 4$ täisarvulist summat.

(6) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = x$ ning $\{a_3\} = y$, $\{a_4\} = z$ ja $\{a_5\} = t$ (kus x, y, z ja t on kõik erinevad), siis juhul, kui x ei ole 0 ega 0,5, on meil vastavalt punktidele (a) ja (b) ülimalt $2 + 1 = 3$ täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktidele (a) ja (c) ülimalt $1 + 1 = 2$ täisarvulist summat.

(7) Kui arvud a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 on kõik erineva murdosaga, siis on meil vastavalt punktile (a) ülimalt 2 täisarvulist summat.

Kokkuvõttes nägime, et rohkem kui 6 täisarvulist summat $a_i + a_j$ saab olla ainult juhul (1), ning sel juhul on kõik summad $a_i + a_j$ täisarvud.

5. *Vastus:* kui $n = 2k$, siis $2^{k-1}(2^{k-1} - 1)$; kui $n = 2k + 1$, siis 0.

Lahendus 1. Värvime kaheksanurga tipud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Kuna tipud A ja B on ühte värvi ning iga minutiga liigub robot üht värvi tipust teist värvi tippu, siis peab roboti teekond tipust A tippu B kestma paarisarvu minuteid.

Nummerdame tipud päripäeva 1-st 8-ni, alustades tipust A (tippu B tähistab siis arv 5), ja märgime järjendina $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_8^{(k)})$ võimaluste arvud, kuidas robot võib k minutiga jõuda tippudesse 1, 2, …, 8. Tõestame induktsiooniga m järgi, et iga $m \geqslant 1$ korral

$$a^{(2m)} = (2^{2m-2} + 2^{m-1}, 0, 2^{2m-2}, 0, 2^{2m-2} - 2^{m-1}, 0, 2^{2m-2}, 0) .$$

Kui $m = 1$, siis on robot läbinud 2 lõiku. Ta võib läbida need kaks lõiku ühes suunas või alustada ükskõik kummas suunas ning pöörata vahepeal ümber ja jõuda tippu 1 tagasi. Järelikult

$$a^{(2)} = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) ,$$

mis on kooskõlas tõestatava väitega.

Eeldame nüüd, et väide kehtib juhul $m = k$. Tähistame lühiduse mõttes $2^{k-1} = s$, siis

$$a^{(2k)} = (s^2 + s, 0, s^2, 0, s^2 - s, 0, s^2, 0) .$$

Järgmisele minutile vastava võimaluste järjendi leidmiseks tuleb iga tipu M puhul liita tema naabertippudele vastavad arvud eelmisel minutil, sest tippu M võib robot liikuda ainult kummmagi naabertipu kaudu. Järelikult

$$a^{(2k+1)} = (0,\, 2s^2+s,\, 0,\, 2s^2-s,\, 0,\, 2s^2-s,\, 0,\, 2s^2+s)$$

ning analoogiliselt

$$a^{(2k+2)} = (4s^2+2s,\, 0,\, 4s^2,\, 0,\, 4s^2-2s,\, 0,\, 4s^2,\, 0)\ .$$

Kuna $4s^2 = 2^{2k}$ ja $2s = 2^k$, siis oleme tõestanud, et väide kehtib ka juhul $m = k+1$. Võimaluste arv, kuidas robot võib jõuda $n = 2k$ minutiga tippu $B = 5$, on niisiis $2^{2k-2} - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2^{k-1}-1)$.

Lahendus 2. Nummerdame kaheksanurga tipud päripäeva 0-st 7-ni, nii et tipu A juures on 0 ja tipu B juures 4 (edaspidi vaatleme tippude numbreid igal pool *modulo* 8). Paneme tähele, et kui robot asub k. minutil tipus T_k, siis $(k{+}1)$. minutil asub ta tipus T_k+1 või T_k-1 *modulo* 8 — niisiis iga minutiga liitub tipu numbrile, kus robot parajasti on, kas 1 või -1 *modulo* 8. Seame roboti igale n minutit kestvale liikumisele vastavusse summa S, mis koosneb n liidetavast 1 või -1. Näiteks $S = 1+1-1+1$ tähendab, et robot liikus kaks minutit päripäeva, siis ühe minuti vastupäeva ja seejärel uuesti ühe minuti päripäeva. Seejuures n minuti järel asub robot tipus S *modulo* 8 ning roboti erinevate liikumiste ja summade S vahel on üksühene vastavus. Robot jõuab n minutiga tipust $A = 0$ tippu $B = 4$ parajasti siis, kui vastav summa S koosneb n liidetavast ning $S \equiv 4 \pmod 8$.

Olgu S_n kõigi n liidetavaga summade S hulk, siis $|S_n| = 2^n$. Olgu $S_n^{(i)}$ selliste n liidetavaga summade hulk, mis annavad 8-ga jagamisel jäägi i ($i = 0, 1, \ldots, 7$). Uurime, kuidas sõltub $|S_n^{(4)}|$ arvust n.

Ilmselt $|S_n^{(4)}| = 0$, kui n on paaritu (üldisemalt $|S_m^{(k)}| = 0$, kui m ja k on erineva paarsusega, sest kõik summad hulgas S_m on sama paarsusega nagu arv m). Ilmselt $|S_4^{(4)}| = 2 = 2\cdot 1$ ja $|S_6^{(4)}| = 6\cdot 2 = 12 = 4\cdot 3$ (esimesel juhul on sobivas summas kõik liidetavad samamärgilised; teisel juhul peame valima ühe, mis on teistest erineva märgiga: selle liidetava valikuks on 6 võimalust ja tema märgi valikuks 2 võimalust). Tõestame induktsiooniga, et $|S_{2k}^{(4)}| = 2^{k-1}(2^{k-1}-1)$.

Paneme tähele, et igast summast hulgas $S_n^{(i)}$ saame kahe liidetava lõppu lisamisel täpselt kaks erinevat summat hulgast $S_{n+2}^{(i)}$ — jääk ei muutu, kui lisame $+1-1$ või $-1+1$. Igast summast hulgas $S_n^{(i)}$ saame ka täpselt ühe summa hulgas $S_{n+2}^{(i+2)}$, lisades $+1+1$, ja ühe summa hulgas $S_{n+2}^{(i-2)}$, lisades $-1-1$ (indekseid vaatleme *modulo* 8). Ühestki summast hulgas $S_n^{(i)}$ ei saa kahe liidetava lisamisel summat hulgast $S_{n+2}^{(m)}$, kus $m=i\pm 1$ või $|m-i|>2$. Seega

$$\begin{aligned}
|S_{n+2}^{(0)}| &= 2|S_n^{(0)}| + |S_n^{(2)}| + |S_n^{(6)}|\,,\\
|S_{n+2}^{(2)}| &= 2|S_n^{(2)}| + |S_n^{(0)}| + |S_n^{(4)}|\,,\\
|S_{n+2}^{(4)}| &= 2|S_n^{(4)}| + |S_n^{(2)}| + |S_n^{(6)}|\,,\\
|S_{n+2}^{(6)}| &= 2|S_n^{(6)}| + |S_n^{(0)}| + |S_n^{(4)}|\,.
\end{aligned}$$

Nüüd $n=2k$ korral

$$\begin{aligned}
|S_{n+2}^{(4)}| &= 2|S_n^{(4)}| + |S_n^{(2)}| + |S_n^{(6)}| =\\
&= 2|S_n^{(4)}| + (2|S_{n-2}^{(2)}| + |S_{n-2}^{(0)}| + |S_{n-2}^{(4)}|) +\\
&\qquad + (2|S_{n-2}^{(6)}| + |S_{n-2}^{(0)}| + |S_{n-2}^{(4)}|) =\\
&= 2|S_n^{(4)}| + 2|S_{n-2}|
\end{aligned}$$

(sest $S_{n-2}^{(1)} = S_{n-2}^{(3)} = S_{n-2}^{(5)} = S_{n-2}^{(7)} = 0$) ning seega vastavalt induktsiooni eeldusele

$$\begin{aligned}
|S_{n+2}^{(4)}| &= 2\cdot 2^{k-1}(2^{k-1}-1) + 2\cdot 2^{2k-2} = 2^{2k-1} - 2^k + 2^{2k-1} =\\
&= 2^{2k} - 2^k = 2^k(2^k-1)\,.
\end{aligned}$$

Lahendus 3. Samuti nagu eelmises lahenduses nummerdame kaheksanurga tipud päripäeva 0-st 7-ni (käsitledes tippude numbreid *modulo* 8) ning vaatleme roboti liikumistele üksüheselt vastavaid summasid S, kus liidetavateks on 1 ja -1. Robot jõuab n minutiga tipust $A=0$ tippu $B=4$ parajasti siis, kui vastav summa S koosneb n liidetavast ja $S\equiv 4 \pmod 8$. See tingimus aga kehtib parajasti siis, kui $n=2k\geqslant 4$ ja summas S on parajasti $k+2+4i$ liidetavat $+1$, kus i on mingi täisarv — seega võime vabalt valida $\ldots$, $k-6$, $k-2$, $k+2$, $k+6$, $\ldots$ liidetavat, mille ette paneme plussi, ning ülejäänute ette paneme miinuse. (Tõepoolest, olgu s liidetavat plussmärgiga, siis $2k-s$ liidetavat on miinusmärgiga ja $S=s-(2k-s)=2s-2k\equiv 4 \pmod 8$ ehk samaväärselt $s-k\equiv 2 \pmod 4$.)

Võimalusi roboti tee valimiseks nii, et ta n minutiga jõuaks punktist A punkti B, on niisiis $\ldots + C_{2k}^{k-6} + C_{2k}^{k-2} + C_{2k}^{k+2} + C_{2k}^{k+6} + \ldots$, kus C_t^s tähistab kombinatsioonide arvu t elemendist s kaupa ning $C_t^s = 0$, kui $s < 0$ või $s > t$.

Märkus. Näitame induktsiooniga k järgi, et

$$\Sigma_{2k} = \ldots + C_{2k}^{k-6} + C_{2k}^{k-2} + C_{2k}^{k+2} + C_{2k}^{k+6} + \ldots = 2^{k-1}(2^{k-1} - 1)\ .$$

Kui $k = 2$, siis $C_4^0 + C_4^4 = 2 = 2^1 \cdot (2^1 - 1)$. Kehtigu nüüd väide k korral, siis $k+1$ jaoks saame (kasutades seost $C_{t+1}^s = C_t^{s-1} + C_t^s$)

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2k+2} &= \ldots + C_{2k+2}^{k-5} + C_{2k+2}^{k-1} + C_{2k+2}^{k+3} + C_{2k+2}^{k+7} + \ldots = \\
&= \ldots + C_{2k+1}^{k-6} + C_{2k+1}^{k-5} + C_{2k+1}^{k-2} + C_{2k+1}^{k-1} + \\
&\qquad + C_{2k+1}^{k+2} + C_{2k+1}^{k+3} + C_{2k+1}^{k+6} + C_{2k+1}^{k+7} + \ldots = \\
&= \ldots + C_{2k}^{k-7} + 2C_{2k}^{k-6} + C_{2k}^{k-5} + C_{2k}^{k-3} + \\
&\qquad + 2C_{2k}^{k-2} + C_{2k}^{k-1} + C_{2k}^{k+1} + 2C_{2k}^{k+2} + \\
&\qquad + C_{2k}^{k+3} + C_{2k}^{k+5} + 2C_{2k}^{k+6} + C_{2k}^{k+7} + \ldots = \\
&= \ldots + C_{2k}^{k-7} + C_{2k}^{k-5} + C_{2k}^{k-3} + C_{2k}^{k-1} + C_{2k}^{k+1} + C_{2k}^{k+3} + \\
&\qquad + C_{2k}^{k+5} + C_{2k}^{k+7} + \ldots + 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1} - 1) = \\
&= \ldots + C_{2k-1}^{k-8} + C_{2k-1}^{k-7} + C_{2k-1}^{k-6} + C_{2k-1}^{k-5} + \\
&\qquad + C_{2k-1}^{k-4} + C_{2k-1}^{k-3} + C_{2k-1}^{k-2} + C_{2k-1}^{k-1} + \\
&\qquad + C_{2k-1}^{k} + C_{2k-1}^{k+1} + C_{2k-1}^{k+2} + C_{2k-1}^{k+3} + \\
&\qquad + C_{2k-1}^{k+4} + C_{2k-1}^{k+5} + C_{2k-1}^{k+6} + C_{2k-1}^{k+7} + \ldots + \\
&\qquad + 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1} - 1) = \\
&= 2^{2k-1} + 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1} - 1) = 2^k(2^{k-1} + 2^{k-1} - 1) = \\
&= 2^k(2^k - 1)\ .
\end{aligned}$$

XII klass

1. *Vastus:* 17 minutit.

   Veendume kõigepealt, et kogu seltskonnal on võimalik tunnel läbida 17 minutiga:

   1) Peeter ja Jüri läbivad tunneli (2 minutit);

2) Peeter toob tõrviku tagasi (1 minut);
3) Kati ja Mari läbivad tunneli (10 minutit);
4) Jüri toob tõrviku tagasi (2 minutit);
5) Peeter ja Jüri läbivad tunneli (2 minutit).

Näitame nüüd, et vähem kui 17 minutiga pole kõigil võimalik tunnelit läbida. Ilmselt tuleb tunnel kokku läbida paaritu arv kordi ning vähemalt 5 korda: 3 korda pärisuunas ja 2 korda vastassuunas tõrviku tagasitoomiseks (ühest tõrviku tagasitoomisest ei piisa, kuna selle järel on tunneli alguses vähemalt 3 inimest, kes ei saa korraga tunnelit läbida). Kui tunnel läbitakse 7 või rohkem korda, siis kulub selleks mitte vähem kui $10 + 2 + 5 \cdot 1 = 17$ minutit. Kui tunnel läbitakse 5 korda, siis pärisuunaliselt minnakse iga kord kahekesi ja see võtab aega vähemalt 2 minutit, kusjuures üks kord (kui läbiminejaks on Mari) kulub aega 10 minutit. Kui tõrviku tagasitoojaks on mõlemal korral Peeter, siis peab Peeter osalema ka igas tunnelit pärisuunaliselt läbivas paaris, mistõttu Kati ja Mari peavad tunneli läbima eraldi ning kokku kulub mitte vähem kui $10 + 5 + 2 + 2 \cdot 1 = 19$ minutit. Kui aga ühel korral ei ole tõrviku tagasitoojaks Peeter, siis kulub kokku mitte vähem kui $10 + 2 + 2 + 2 + 1 = 17$ minutit.

2. *Vastus:* ei.

Olgu N ainult numbritest 2 ja 0 koosnev arv, mis lõpeb t nulliga ($t \geqslant 0$), siis

$$N = \overline{2\ldots 2} \cdot 10^t = \overline{1\ldots 1} \cdot 2^{t+1} \cdot 5^t \ ,$$

kus arvus $2\ldots 2$ punktiiriga näidatud osa koosneb numbritest 2 ja 0 (arvus $1\ldots 1$ vastavalt 1 ja 0). Kuna tegur $\overline{1\ldots 1}$ ei jagu 2-ga ega 5-ga, siis juhul, kui $N = n^k$, peavad nii $t+1$ kui ka t olema arvu k kordsed, mistõttu $k = 1$.

3. Viies kõik liikmed ühele poole, avades sulud ja koondades sarnased liikmed saame, et ülesandes antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 < 0 \ .$$

Teisendame selle võrratuse vasakut poolt:

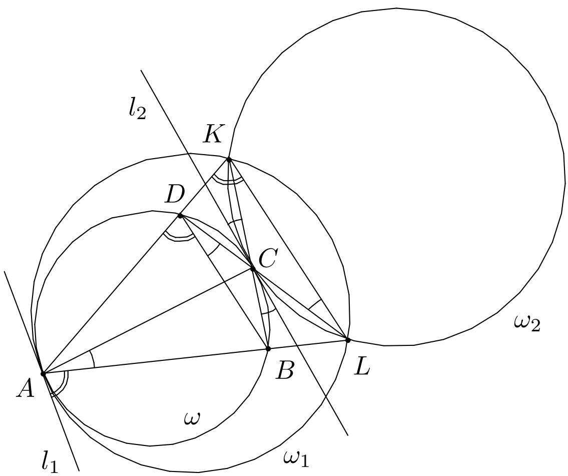
$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2 = \\
&= (a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab) = \\
&= \big((a-b)^2-c^2\big)\big((a+b)^2-c^2\big) = \\
&= (a-b+c)(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)\ .
\end{aligned}
$$

Ülesandes antud võrratus on niisiis samaväärne võrratusega

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0\ . \qquad (1)$$

Siin esimene tegur on positiivne ning ülejäänud teguritest ei saa rohkem kui üks korraga olla negatiivne (olgu näiteks $a+b-c<0$ ja $b+c-a<0$, siis nende võrratuste liitmisel saame $2b<0$ — vastuolu). Seega kehtib võrratus (1) siis ja ainult siis, kui arvudest a, b ja c mistahes kahe summa on suurem kolmandast, s.t. need arvud on mingi kolmnurga külgede pikkusteks.



Joonis 8

4. *Lahendus 1.* Olgu ω_1 ja ω_2 vastavalt kolmnurkade AKL ja CKL ümberringjooned (vt. joonist 8). Oletame, et ringjooned ω ja ω_2 puutuvad teineteist punktis C, ning olgu l_2 nende ühine puutuja. Et kõõlule toetuv piirdenurk on võrdne nurgaga selle kõõlu ja tema otspunktis

ringjoonele tõmmatud puutuja vahel, siis

$$\angle KLC = \angle KCl_2 = \angle BCl_2 = \angle BDC\ ,$$

mistõttu $KL \parallel BD$. Seega $\angle ADB = \angle AKL$ ning järelikult ringjoonele ω punktis A tõmmatud puutuja moodustab kõõluga AB sama suure nurga nagu ringjoonele ω_1 punktis A tõmmatud puutuja moodustab kõõluga AL. Et punktid A, B ja L on ühel sirgel, siis ringjoontel ω ja ω_1 on punktis A ühine puutuja l_1, s.t. need ringjooned puutuvad teineteist punktis A.

Rakendades sama arutelu vastassuunas näitame, et ringjoonte ω ja ω_1 puutumisest punktis A järeldub ringjoonte ω ja ω_2 puutumine punktis C.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses olgu ω_1 ja ω_2 vastavalt kolmnurkade AKL ja CKL ümberringjooned. Kui ringjooned ω ja ω_1 puutuvad teineteist punktis A, siis leidub selline homoteetiateisendus keskpunktiga punktis A, mis viib ringjoone ω ringjooneks ω_1. Et K on sirge AD lõikepunkt ringjoonega ω_1 ja L on sirge AB lõikepunkt ringjoonega ω_1 ning punktid B ja D paiknevad ringjoonel ω, siis see homoteetia viib punkti D punktiks K ning punkti B punktiks L, mistõttu $KL \parallel BD$. Et seejuures lõigud BK ja DL lõikuvad punktis C, siis leidub homoteetiateisendus keskpunktiga C, mis viib punkti B punktiks K ning punkti D punktiks L. See homoteetia viib siis kolmnurga CDB ümberringjoone ω kolmnurga CKL ümberringjooneks ω_2, mistõttu ringjooned ω ja ω_2 puutuvad teineteist punktis C.

Analoogiliselt näitame, et ringjoonte ω ja ω_2 puutumisest punktis C järeldub ringjoonte ω ja ω_1 puutumine punktis A.

5. *Vastus:* 2002.

Lahendus. Tähistame k võidu võimalike jaotumiste arvu n külalise vahel sümboliga C_n^k. Paneme tähele, et mistahes k võidu jaotumise n külalise vahel saab ühe lisavõidu väljaloosimisega ülejäänud $n-k$ külalise seas täiendada $n-k$ erinevaks $k+1$ võidu jaotumiseks. Iga $k+1$ võidu jaotumine on niimoodi saadav aga $k+1$ erinevast k võidu jaotumisest ($k+1$ võidust ükskõik millise võime lugeda lisavõiduks). Seega mistahes $n > 0$ ja $0 \leqslant k \leqslant n$ korral kehtib valem

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot C_n^k\ . \qquad (2)$$

Tähistagu järgnevas n ja m vastavalt külaliste arvu ja tegelikku võitude arvu. Ülesande tingimustest saame võrrandisüsteemi

$$\left\{\begin{aligned} C_n^m &= 2 \cdot C_n^{m-1} \\ C_n^{m+1} &= \frac{3}{2} \cdot C_n^m \end{aligned}\right. . \tag{3}$$

Asendades siin võrduste vasakud pooled valemi (2) järgi, saame

$$\frac{n-m+1}{m} \cdot C_n^{m-1} = 2 \cdot C_n^{m-1}$$

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot C_n^m = \frac{3}{2} \cdot C_n^m$$

Et ülesande tingimuste järgi ilmselt $C_n^m > 0$ ja $C_n^{m-1} > 0$, saame esimesest võrrandist $n - m + 1 = 2m$, kust $n = 3m - 1$, ning teisest võrrandist $2(n - m) = 3(m + 1)$. Asendades siin $n = 3m - 1$, saame $4m - 2 = 3m + 3$, kust $m = 5$ ja $n = 14$. Jääb veel leida võitude jaotumiste arv 14 külalise ja 5 võidu korral:

$$C_{14}^5 = C_{14}^1 \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{10}{5} = 14 \cdot 13 \cdot 11 = 2002 \, .$$