Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ruudu $ABCD$ külgedel BC ja CD võetakse vastavalt punktid K ja L nii, et $\angle AKB = \angle AKL$. Leia nurga KAL suurus.

2. Tähistagu $\overline{xy}$ kahekohalist arvu numbritega x ja y. Kas leiduvad sellised erinevad numbrid a, b ja c, millest ükski ei ole 0, et arv $\overline{ab}$ jagub c-ga, arv $\overline{bc}$ jagub a-ga ning arv $\overline{ca}$ jagub b-ga?

3. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erinevad reaalarvud ning olgu nende kõigi paarikaupa võetud summade $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ hulgas m erinevat arvu. Leia m vähim võimalik väärtus.

4. Mari kirjutab tahvlile 5 arvu. Seejärel võib Jüri neid arve sammhaaval muuta, kustutades igal sammul ühe arvu ja kirjutades selle asemele arvu $x+y-z$, kus x, y ja z on mingid kolm ülejäänud neljast tahvlil olevast arvust. Kas Jüri saab Mari kirjutatud mistahes arvude korral toimida nii, et lõpliku arvu kirjeldatud sammude järel on tahvlil viis võrdset arvu?

5. Saarel elas $n > 1$ pärismaalast, kellest igaüks rääkis kas ainult tõtt või ainult valet, kusjuures igal pärismaalasel oli ülejäänute seas vähemalt üks sõber. Saarele saabunud uus kuberner korraldas küsitluse, kus iga pärismaalane pidi vastama, kas tema sõprade seas on rohkem valetajaid või tõerääkijaid, või on neid ühepalju. Küsitlusel vastasid kõik pärismaalased, et nende sõprade seas on valetajaid rohkem kui tõerääkijaid. Seejärel lasi kuberner ühe pärismaalase valetamises kahtlustatuna hukata ja korraldas siis uue küsitluse, kus pärismaalased pidid veelkord vastama samale küsimusele. Seekord vastasid kõik pärismaalased, et nende sõprade seas on tõerääkijaid rohkem kui valetajaid.

   Kas hukatud pärismaalane oli valetaja või tõerääkija ja kas järelejäänud pärismaalaste seas on rohkem valetajaid või tõerääkijaid (eeldame, et pärismaalaste tõe- või valerääkimine ja sõprussuhted nende vahel kahe küsitluse vahepeal ei muutunud)?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Positiivsete täisarvude m ja n suurim ühistegur d ja vähim ühiskordne v rahuldavad tingimust $3m + n = 3v + d$. Tõesta, et arv m jagub arvuga n.

2. Olgu ABC mittetäisnurkne kolmnurk ja H selle kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk ABH on teravnurkne siis ja ainult siis, kui $\angle ACB$ on nürinurk.

3. Juku leiab positiivsete täisarvude $a_1, a_2, \ldots, a_7$ kõikvõimalikud paarikaupa korrutised $a_i a_j$, summad $a_i + a_j$ ja vahede absoluutväärtused $|a_i - a_j|$, kus $i \neq j$. Kui palju erinevaid paarituid arve võib maksimaalselt olla Juku leitud arvude hulgas?

4. Leia sellise murdjoone maksimaalne pikkus, mille otspunktideks on ühikkuubi kaks vastastippu, lülideks on selle kuubi servad ja tahkude diagonaalid ning mis ei lõika iseennast ega läbi kuubi ühtegi tippu rohkem kui üks kord.

5. Õpetaja kirjutab tahvli kumbagi serva arvu 1. Esimene õpilane kirjutab nende vahele lisaks arvu 2; iga järgmine õpilane kirjutab iga kahe tahvlil kõrvuti oleva arvu vahele lisaks nende summa (pärast teise õpilase tahvli juures käimist on tahvlil arvud $1, 3, 2, 3, 1$, pärast kolmandat õpilast arvud $1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1$, jne.) Leia kõigi tahvlil olevate arvude summa pärast seda, kui n õpilast on käinud sinna arve juurde kirjutamas.

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Milliste reaalarvude a korral on võrrandil $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ neli reaalarvulist lahendit, mis on mingi aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks?

2. Leia võrdkülgse kolmnurga pindala, kui selle sisepiirkonnas leidub punkt, mille kaugused kolmnurga tippudest on 3, 4 ja 5.

3. Õpetaja kirjutab tahvlile 2002-kohalise arvu $999\ldots9$. Esimene õpilane lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri a ja b korrutiseks ning kustutab siis tahvlil oleva arvu ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu a' ja b', et $|a-a'| = 2$ ja $|b-b'| = 2$. Teine õpilane valib ühe tahvlil olevatest arvudest, lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri c ja d korrutiseks ning kustutab siis valitud arvu tahvlilt ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu c' ja d', et $|c-c'| = 2$ ja $|d-d'| = 2$. Kolmas õpilane valib omakorda ühe tahvlil olevatest arvudest ning asendab selle sama reegli kohaselt kahe uue arvuga, jne. Kas on võimalik, et pärast seda, kui mingi arv õpilasi on käinud tahvli juures, on kõik tahvlil olevad arvud võrdsed 9-ga?

4. Olgu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sellised reaalarvud, et nende paarikaupa võetud summadest $a_i + a_j$, kus $i < j$, vähemalt N on täisarvud. Leia suurim arv N, mille korral on võimalik, et need summad $a_i + a_j$ ei ole kõik täisarvud.

5. Juku ehitas roboti, mis liigub mööda korrapärase kaheksanurga kujulist rada, läbides kaheksanurga ühe külje täpselt 1 minutiga. Robot alustab liikumist kaheksanurga tipust A ning edaspidi võib ta mistahes tippu jõudes kas samas suunas liikumist jätkata või ümber pöörata ja jätkata liikumist vastassuunas. Kui mitmel erineval viisil võib robot liikuda, nii et ta n minuti pärast on tipu A vastastipus B?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Peeter, Jüri, Kati ja Mari seisavad pimeda tunneli sissepääsu juures. Neil on kasutada nelja peale üks tõrvik, milleta keegi neist ei julge tunnelis viibida, ning tunnel on nii kitsas, et üle kahe inimese seal koos liikuda ei saa. Peetril kulub tunneli läbimiseks 1 minut, Jüril 2 minutit, Katil 5 minutit ja Maril 10 minutit. Leia vähim võimalik aeg, mille jooksul kõik pääsevad läbi tunneli.

2. Kas arv, mis koosneb ainult numbritest 2 ja 0, võib olla mingi positiivse täisarvu k-s aste, kus $k \geqslant 2$?

3. Tõesta, et positiivsed reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrratust

   $$2(a^4 + b^4 + c^4) < (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

   siis ja ainult siis, kui leidub kolmnurk küljepikkustega a, b ja c.

4. Kumera nelinurga $ABCD$ kõik tipud paiknevad ringjoonel ω. Kiired AD ja BC lõikuvad punktis K ning kiired AB ja DC lõikuvad punktis L. Tõesta, et kolmnurga AKL ümberringjoon puutub ringjoont ω siis ja ainult siis, kui kolmnurga CKL ümberringjoon puutub ringjoont ω.

5. Juku sünnipäeval loositakse külaliste vahel välja teatud arv ühesuguseid võite selliselt, et iga külaline võib saada ülimalt ühe võidu. On teada, et kui võite oleks tegelikust ühe võrra vähem, siis oleks võitude võimalikke jaotumisi külaliste vahel tegelikust 50% võrra vähem; kui aga võite oleks tegelikust ühe võrra rohkem, siis oleks võitude võimalikke jaotumisi tegelikust 50% võrra rohkem. Leia võitude võimalike jaotumiste arv.