XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Коля должен был решить у доски математическую задачу. Стирая с доски предыдущее задание, он случайно стер часть своей задачи: на доске остался текст $37 \cdot (72 + 3x) = 14{*}{*}45$, где $*$ обозначает стертую цифру. Показать, что Коля все равно сможет решить свою задачу (зная, что число x должно быть целым).

2. При делении трехзначного числа на число, полученное при перемене местами его цифры сотен и цифры единиц, в целой части получим 3, а в остатке сумму цифр этого трехзначного числа. Найти все такие трехзначные числа.

3. Окружность радиуса 10 касается двух соседних сторон квадрата, а точки пересечения окружности с двумя остальными сторонами квадрата являются концами некоторого ее диаметра. Найти длину стороны квадрата.

4. Известно, что уравнение

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2001| = a$$

имеет ровно одно решение. Найти значение a.

5. Таблицу, состоящую из 9 строк и 2001 столбцов, заполняют натуральными числами 1, 2, ..., 2001 так, что каждое число имеется в таблице ровно 9 раз и числа, расположенные в одном и том же столбце, отличаются друг от друга не более чем на 3. Найти наибольшее возможное значение наименьшей суммы столбца (суммы чисел, расположенных в одном столбце).

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

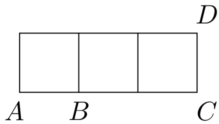
X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Среди внутренних углов выпуклого n-угольника имеется ровно три тупых угла. Найти все возможные значения числа n.

2. Найти такое наименьшее n, для которого среди любых n целых чисел найдется три таких, сумма которых делится на 3.

3. На рисунке изображены три квадрата. Найти сумму величин углов ADC и BDC.



4. Назовем тройку положительных целых чисел (a, b, c) *гармонической*, если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$. Доказать, что для любого фиксированного положительного целого числа c существует столько же гармонических троек (a, b, c), сколько имеется положительных делителей числа c^2.

5. Соседское племя живущего в Африке племени Абабаб также использует в алфавите только буквы А и Б. При составлении слов в их языке действуют следующие строгие правила:

   (1) А — слово;

   (2) если w — слово, то тогда и ww, и $w\overline{w}$ слова, где $\overline{w}$ получают из слова w при замене всех букв А на буквы Б и всех букв Б на буквы А (xy означает последовательное написание x и y);

   (3) все слова конструируются по правилам (1) и (2).

   Доказать, что любые два слова одинаковой длины в этом языке отличаются друг от друга ровно на половину букв.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Величины внутренних углов выпуклого n-угольника равны $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$. Найти все возможные значения числа n и значение α для каждого такого n.

2. Ученик написал на доске верное действие сложения
$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{E}{F}\,,$$
где оба слагаемых несократимые дроби, а знаменатель суммы F является наименьшим общим кратным знаменателей слагаемых B и D. Затем он правильно сократил полученную в сумме дробь $\frac{E}{F}$ на целое число d. Доказать, что d является общим делителем знаменателей слагаемых B и D.

3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC берут соответственно точки D, E и F так, что у отрезков AD, BE и CF имеется общая точка O. Доказать, что
$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}\,.$$

4. Пусть x и y такие неотрицательные действительные числа, что $x + y = 2$. Доказать, что $x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2$.

5. Рассмотрим на координатной плоскости всевозможные трапеции, величины внутренних углов которых равны 90°, 90°, 45° и 135°, основания параллельны одной из координатных осей и координаты всех вершин целые числа. Назовем *величиной* такой трапеции число точек с целочисленными координатами, расположенных во внутренней области и на границе трапеции.
   - а) Сколько найдется попарно неконгруэнтных (т.е. не преобразуемых одна в другую сдвигами, поворотами и отражениями) трапеций с описанными свойствами и величиной 2001?
   - б) Найти все положительные целые числа меньше 50-ти, которые не являются величиной ни одной такой трапеции.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x. \end{cases}$$

2. Найти наибольшее такое k, при котором из множества натуральных чисел от 1 до $2n$ можно выбрать k чисел так, что ни одно из выбранных чисел не делится ни на одно другое из выбранных чисел.

3. Пусть I и r соответственно центр и радиус вписанной в прямоугольный треугольник ABC окружности. Проведенные из вершин острых углов лучи AI и BI пересекают противолежащие катеты BC и AC соответственно в точках D и E. Доказать, что

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{r}\ .$$

4. Доказать, что для любого целого числа $a > 1$ найдется такое простое число p, что

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$$

является составным числом.

5. В каждую клетку таблицы 3×3 записывают одно действительное число так, что находящееся в каждой клетке число равно абсолютной величине разности суммы чисел этой строки и суммы чисел этого столбца.

   а) Доказать, что каждое число в таблице представимо в виде суммы или разности двух чисел таблицы.

   б) Показать, что в соответствии с условием задачи можно заполнить таблицу так, что не все записанные в нее числа нули.