Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* $x = 1271$.

Teisendame võrrandi kujule $111(24 + x) = 14{*}{*}45$ ning leiame arvu $y = 24 + x$. Kõigepealt paneme tähele, et

$$111 \cdot 1000 = 111000 < 14{*}{*}45 < 222000 = 111 \cdot 2000\ .$$

Seega on arv y neljakohaline ning selle esimene number on 1. Ilmne on ka, et arvu y viimane number peab olema 5. Olgu siis $y = \overline{1ab5}$, kus $0 \leqslant a,\, b \leqslant 9$. Kirjutame vaadeldava korrutamistehte välja arvude kirjaliku korrutamise algoritmi järgi:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 1 & a & b & 5 \\ & \times & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & a & b & 5 \\ & 1 & a & b & 5 & \\ 1 & a & b & 5 & & \\ \hline 1 & 4 & * & * & 4 & 5 \end{array}$$

Näeme, et summa $b + 5$ lõpunumber on 4, millest $b = 9$. Vasakult teise positsiooni põhjal $a \leqslant 2$, sest vasakult esimesse positsiooni ülekannet ei tule ning vasakult kolmandast positsioonist saame $b = 9$ tõttu ülekandeks vähemalt 1. Kui saaksime sealt ülekandeks rohkem kui 1, peaks vasakult kolmanda positsiooni põhjal olema $a \geqslant 8$ — vastuolu. Niisiis $a = 2$ ja $y = 1295$ ning arvu x väärtuseks saame $1295 - 24 = 1271$.

2. *Vastus:* 441 ja 882.

Olgu otsitav arv $\overline{abc}$, siis ülesande tingimuse kohaselt

$$\overline{abc} = 3\overline{cba} + (a + b + c)\ ,$$

millest järeldub, et $1 \leqslant c \leqslant 3$. Kirjutades võrrandi kujul

$$100a + 10b + c = 3(100c + 10b + a) + (a + b + c)$$

ja lihtsustades saame $32a = 100c + 7b$.

Vaatame nüüd läbi kõik võimalikud arvu c väärtused.

1) Kui $c = 1$, saame võrratused

$$100 \leqslant 32a = 100 + 7b \leqslant 163 ,$$

millest järeldub, et $4 \leqslant a \leqslant 5$. Kui $a = 4$, siis $128 = 100 + 7b$, millest $b = 4$. Kui $a = 5$, siis $160 = 100 + 7b$ ning b ei ole täisarv. Üheks sobivaks arvuks saime niisiis 441.

2) Kui $c = 2$, saame võrratused

$$200 \leqslant 32a = 200 + 7b \leqslant 263 ,$$

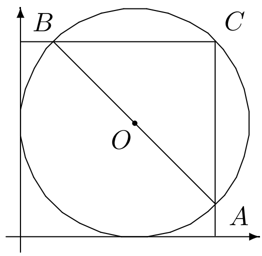
millest järeldub, et $7 \leqslant a \leqslant 8$. Kui $a = 7$, siis $224 = 200 + 7b$ ning b pole täisarv. Kui $a = 8$, siis $256 = 200 + 7b$, millest $b = 8$. Seega teiseks sobivaks arvuks on 882.

3) Kui $c = 3$, saame

$$300 \leqslant 32a = 200 + 7b \leqslant 363 ,$$

kust $a \geqslant 10$, mis arvu numbriks ei sobi.

3. *Vastus:* $10 + 5\sqrt{2}$.



Joonis 1

Kasutame sellist ristkoordinaatide süsteemi, kus ruudu need kaks külge, mis ringjoont puutuvad, paiknevad koordinaattelgedel: siis ringjoone keskpunkt on $O(10,10)$ (vt. joonist 1). Olgu ruudu küljepikkus a (ilmselt peab olema $a > 10$) ning olgu ringjoone lõikepunktid ruudu kahe ülejäänud küljega A ja B. Kuna AB on ringjoone diameeter, siis nende külgede ühine otspunkt $C(a,a)$ paikneb ringjoonel. Et CO on ringjoone raadius, saame $\sqrt{(a-10)^2+(a-10)^2} = 10$, kust $a - 10 = 5\sqrt{2}$ ja $a = 10 + 5\sqrt{2}$.

4. *Vastus:* 1001000.

Paneme tähele, et kui x on selle võrrandi lahend, siis ka $2002 - x$ on lahend. Et lahend oleks üksainus, peab seega olema $x = 2002 - x$ ehk $x = 1001$. Siis

$$\begin{aligned} a &= 1000 + 999 + \ldots + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 999 + 1000 = \\ &= (1000+1) + (999+2) + \ldots + (2+999) + (1+1000) = \\ &= 1000 \cdot 1001 = 1001000 \,. \end{aligned}$$

Märkus. Veendume (kuigi ülesanne on sõnastatud nii, et seda ei nõuta), et sellise a korral on $x = 1001$ tõepoolest võrrandi ainus lahend. Olgu $y = 1001 + b$ selle võrrandi suvaline lahend, siis

$$\begin{aligned} &|y-1| + |y-2| + \ldots + |y-2001| = \\ &\quad = |1000+b| + \ldots + |1+b| + |b| + |1-b| + \ldots + |1000-b| = \\ &\quad = a = 1000 + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots 1000 \,. \end{aligned}$$

Nüüd piisab tähele panna, et $|b| \geqslant 0$ (kusjuures võrdus kehtib ainult $b = 0$ korral) ning mistahes $k = 1, \ldots, 1000$ korral

$$|k+b| + |k-b| \geqslant |k+b+k-b| = k + k \,.$$

5. *Vastus:* 24.

Uurime, kuidas saavad selles tabelis paikneda arvud 1. Ilmselt saavad arvud 1 olla samas veerus ainult arvudega 2, 3 ja 4. Kuna arve 1, 2, 3 ja 4 on tabelis kokku $4 \cdot 9$, siis saavad arvud 1 paikneda ülimalt neljas veerus. Kui kõik arvud 1 on samas veerus, siis on tabeli minimaalne veerusumma 9. Kui arvud 1 on kahes veerus, siis peab ühes neist olema vähemalt 5 arvu 1 ja selle veeru arvude summa on ülimalt $5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 21$. Kui arvud 1 on neljas veerus, siis on neis veergudes olevate arvude summa $9 \cdot (1+2+3+4) = 90$ ja minimaalne veerusumma on seega ülimalt $\left[\frac{90}{4}\right] = 22$. Kui arvud 1 on kolmes veerus, on võimalikult suure veerusumma saamiseks otstarbekas paigutada nendega samadesse veergudesse arvud 3 ja 4. Sel juhul kolme veeru arvude summa on $9\cdot(1+3+4) = 72$ ja minimaalne veerusumma saab olla ülimalt 24. Näitame nüüd, et leidub tabel, kus minimaalne veerusumma on 24:

1	1	1	2	2	6	7	...	2001
1	1	1	2	2	6	7	...	2001
1	1	1	2	2	6	7	...	2001
3	3	3	2	2	6	7	...	2001
3	3	3	2	5	6	7	...	2001
3	3	3	5	5	6	7	...	2001
4	4	4	5	5	6	7	...	2001
4	4	4	5	5	6	7	...	2001
4	4	4	5	5	6	7	...	2001

Seega vähima veerusumma suurim võimalik väärtus on 24.

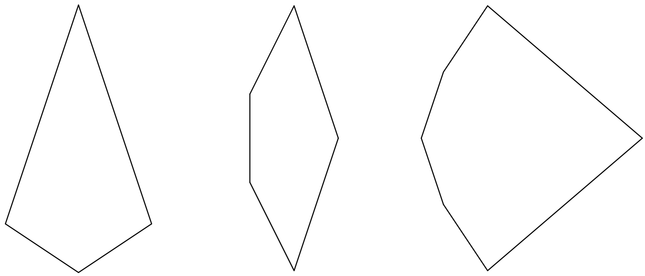
X klass

1. Vastus: n võimalikud väärtused on 4, 5 ja 6.

   Kumera n-nurga sisenurkade summa on $(n-2)\cdot\pi$. Selle hulknurga 3 sisenurga suurused on suuremad kui $\frac{\pi}{2}$ ja kumeruse tõttu väiksemad kui π; ülejäänud $n-3$ sisenurga suurused on suuremad kui 0 ja mitte suuremad kui $\frac{\pi}{2}$. Siit saame võrratused

   $$(n-3)\cdot 0 + 3\cdot\frac{\pi}{2} < (n-2)\cdot\pi < (n-3)\cdot\frac{\pi}{2} + 3\cdot\pi\,,$$

   millest arvuga π läbi jagades ja teisendades saame $\frac{7}{2} < n < 7$ ehk n täisarvulisust arvestades $4 \leqslant n \leqslant 6$. Jääb üle veenduda, et tõesti leiduvad nelinurk, viisnurk ja kuusnurk, mille sisenurkade hulgas on täpselt kolm nürinurka (vt. joonist 2).



$n = 4$ $\qquad$ $n = 5$ $\qquad$ $n = 6$

Joonis 2

2. *Vastus:* $n = 5$.

Kolme sellise täisarvu summa, mis annavad kolmega jagamisel erinevad jäägid (0, 1 ja 2), jagub kolmega. Samuti jagub kolmega mistahes kolme sellise arvu summa, mis annavad kolmega jagamisel kõik ühe ja sama jäägi. Seega juhul, kui n täisarvu seas ei leidu kolme sellist, mille summa jagub kolmega, saab nende arvude kolmega jagamisel esineda ülimalt kaks erinevat jääki ning kumbki neist ülimalt kahel korral, mistõttu neid arve on ülimalt neli. Seega $n \geqslant 5$ arvu seast saab kolm arvu, mille summa jagub kolmega, alati leida.

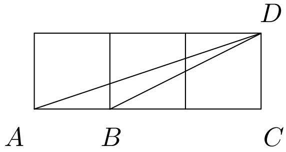
Teisalt on lihtne veenduda, et näiteks arvudest 1, 3, 4, 6 ükski kolmik ei anna kolmega jaguvat summat.

3. *Vastus:* $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lahendus 1. Tähistame $\alpha = \angle ADC$ ja $\beta = \angle BDC$ (vt. joonist 3). Olgu ruudu küljepikkus a, siis kolmnurkadest ADC ja BDC saame $\tan\alpha = \dfrac{3a}{a} = 3$ ja $\tan\beta = \dfrac{2a}{a} = 2$. Seega

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{3+2}{1-3\cdot 2} = -1\ ,$$

millest $\angle ADC + \angle BDC = \dfrac{3\pi}{4}$.



Joonis 3

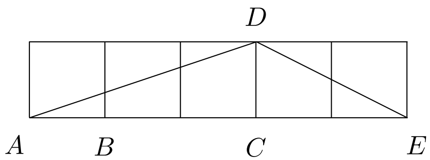
Lahendus 2. Olgu E punktiga B sirge CD suhtes sümmeetriline punkt (vt. joonist 4), siis

$$\angle ADC + \angle BDC = \angle ADC + \angle CDE = \angle ADE\ .$$

Olgu ruudu küljepikkus a. Avaldades $|AD| = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = a\sqrt{10}$, $|ED| = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$ ning kasutades koosinusteoreemi kolmnurgas ADE, saame

$$\begin{aligned} 25a^2 &= |AE|^2 = |AD|^2 + |ED|^2 - 2|AD| \cdot |ED| \cdot \cos \angle ADE = \\ &= 10a^2 + 5a^2 - 10a^2\sqrt{2} \cdot \cos \angle ADE\ , \end{aligned}$$

millest $\cos \angle ADE = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ning $\angle ADE = \dfrac{3\pi}{4}$.

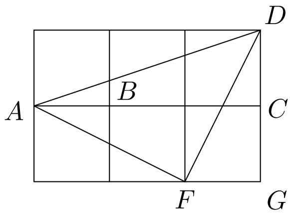


Joonis 4

Lahendus 3. Täiendame joonist ja valime punktid F ja G nii nagu näidatud joonisel 5. Kuna kolmnurgad BCD ja DGF on kongruentsed ja täisnurksed, siis

$$\begin{aligned} \angle ADF &= \angle ADC - \angle FDG = \angle ADC - \left(\frac{\pi}{2} - \angle DFG\right) = \\ &= \angle ADC - \left(\frac{\pi}{2} - \angle BDC\right)\ , \end{aligned}$$

kust $\angle ADC + \angle BDC = \dfrac{\pi}{2} + \angle ADF$. Et lõigud AF ja DF saadakse teineteisest pöördel täisnurga võrra ümber punkti F, siis kolmnurk AFD on võrdhaarne ja täisnurkne ning $\angle ADF = \dfrac{\pi}{4}$, kust $\angle ADC + \angle BDC = \dfrac{3\pi}{4}$.



Joonis 5

4. Paneme tähele, et mistahes nullist erinevate täisarvude a, b korral

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \iff \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \iff ab = (a+b)c \iff$$
$$\iff ab - ac - bc = 0 \iff ab - ac - bc + c^2 = c^2 \iff$$
$$\iff (a-c)(b-c) = c^2.$$

Kui arvud a ja b on positiivsed ja $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$, siis $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{c}$ ja $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c}$, mistõttu $a > c$ ja $b > c$ ehk $a - c > 0$ ja $b - c > 0$. Teisest küljest, kui $a - c > 0$ ja $b - c > 0$, siis on ka arvud a ja b positiivsed. Seega (a, b, c) on harmooniline kolmik parajasti siis, kui arvud $a - c$ ja $b - c$ on positiivsed ning $(a-c)(b-c) = c^2$. Niisiis saame üksühese vastavuse harmooniliste kolmikute (a, b, c) ja positiivsete täisarvude paaride (r, s) vahel, kus $rs = c^2$. Arvu c^2 iga positiivne jagaja esineb täpselt ühes niisuguses paaris esimesel kohal. Seega neid paare ning ühtlasi ka harmoonilisi kolmikuid, mille kolmas komponent on c, on niisama palju kui arvu c^2 positiivseid jagajaid.

5. *Lahendus 1.* Teeme induktsiooni sõnade pikkuse järgi. Olgu u_1 ja u_2 mistahes erinevad ühepikkused sõnad ja eeldame, et kõigi lühemate sõnade paaride korral ülesande väide kehtib. Kuna ühetähelisi sõnu

on ainult üks, siis u_1 ja u_2 ei ole ühetähelised ning on seega konstrueeritud reegli (2) põhjal. Niisiis leiduvad mingid sõnad v_1 ja v_2, nii et $u_1 = v_1 v_1$ või $u_1 = v_1 \overline{v_1}$ ning $u_2 = v_2 v_2$ või $u_2 = v_2 \overline{v_2}$. Et igal juhul on v_1 kaks korda lühem u_1-st ja v_2 kaks korda lühem u_2-st, siis v_1 ja v_2 on ühepikkused. Kui $v_1 = v_2 = v$, siis sõnadest u_1 ja u_2 peab üks olema vv ja teine $v\overline{v}$. Sõnade vv ja $v\overline{v}$ esimesed pooled langevad kokku, teistes pooltes on aga kõik tähed erinevad, seega need sõnad erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest. Edasi vaatleme juhtu, kui $v_1 \neq v_2$. Et induktsiooni eelduse kohaselt v_1 ja v_2 erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest, siis piisab näidata, et sõnade u_1 ja u_2 teised pooled erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest. Kui need teised pooled on v_1 ja v_2, siis see väide ilmselt kehtib. Samuti on selge, et $\overline{v_1}$ ja $\overline{v_2}$ erinevad teineteisest poolte tähtede poolest (erinevused on täpselt samades kohtades kus sõnadel v_1 ja v_2). Sõnad v_1 ja $\overline{v_2}$ aga erinevad teineteisest parajasti nende tähtede poolest, mille poolest v_1 ja v_2 kokku langevad — seega ka v_1 ja $\overline{v_2}$ erinevad teineteisest poolte tähtede poolest; samuti on ka sõnadega $\overline{v_1}$ ja v_2. Seega erinevad sõnad u_1 ja u_2 igal juhul teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

Lahendus 2. Seame igale sõnale w vastavusse polünoomi P_w muutujatest $x_1, x_2, \ldots$ järgmiste reeglitega:

$P_{\mathrm{A}} = 1$ (ei sisalda ühtki muutujat);

kui P_w sisaldab muutujaid $x_1, \ldots, x_n$, siis

$$P_{ww} = P_w \cdot (1 + x_{n+1})$$

ja

$$P_{w\overline{w}} = P_w \cdot (1 - x_{n+1}) .$$

Kui P_w avaldises sulud avada, tekib täpselt niipalju liikmeid, kuipalju on sõnas w tähti, sest polünoomis P_{A} on 1 liige ning iga korrutamine kaksliikmega suurendab liikmete arvu kaks korda. Seejuures ühepikkustele sõnadele vastavate (samu muutujaid sisaldavate) polünoomide lahtikirjutused erinevad üksteisest ainult liikmete ees olevate märkide poolest. Induktsiooniga w pikkuse järgi on lihtne veenduda, et need liikmed on võimalik panna niisugusesse järjekorda, et i-nda liikme ees olev märk on $+$ või $-$ vastavalt sellele, kas i-s täht sõnas

w on A või B. Tõepoolest, kui $w = \mathrm{A}$, siis see väide on ilmne. Olgu nüüd w jaoks P_w niisugune esitus olemas. Korrutamisel kaksliikmega $(1+x_{n+1})$ või $(1-x_{n+1})$ korjame järjekorda säilitades ette need liikmed, mis on saadud P_w korrutamisel 1-ga, ja nende järele kirjutame samuti järjekorda säilitades need liikmed, mis on saadud P_w korrutamisel x_{n+1}-ga (või $-x_{n+1}$-ga). Saadud liikmete jadas on i-nda liikme ees märk + parajasti siis, kui sõnas ww (või vastavalt sõnas $w\overline{w}$) on i-ndaks täheks A.

Võtame nüüd kaks erinevat ühepikkust sõna u ja v. Eelnenud konstruktsioonist tuleneb muuhulgas, et $P_u \neq P_v$. Olgu

$$\begin{aligned} P_u &= (1+(-1)^{i_1}x_1)\cdot\ldots\cdot(1+(-1)^{i_n}x_n)\ , \\ P_v &= (1+(-1)^{j_1}x_1)\cdot\ldots\cdot(1+(-1)^{j_n}x_n)\ . \end{aligned}$$

Siis leidub indeks l, nii et $i_l \neq j_l$. Võtame

$$\alpha = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, \ldots, (-1)^{i_n})\ ,$$

siis $P_u(\alpha) = 2\cdot\ldots\cdot 2 = 2^n$, aga $P_v(\alpha) = 0$, sest l-nda teguri väärtus on 0. Vaadates neid polünoome lahtikorrutatuna näeme, et polünoomi P_u iga liikme (koos märgiga) väärtus väärtustusel α on 1, polünoomi P_v liikmetest on aga täpselt poolte väärtus 1 ja poolte väärtus -1. Et P_u ja P_v erinevad teineteisest ainult liikmete märkide poolest, siis täpselt pooltel liikmetel on polünoomis P_v teistsugune märk kui polünoomis P_u, mis tähendab eelneva põhjal, et sõnad u ja v erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

XI klass

1. *Vastus:* Arvu n võimalikud väärtused on $n = 3$ ja $n = 4$. Esimesel juhul $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, teisel juhul $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$.

   Ilmselt peab olema $n \geqslant 3$, sest muidu ei teki üldse hulknurka. Et nurkade suurused moodustavad aritmeetilise jada, siis vaadeldava hulknurga sisenurkade summa on

$$n\cdot\frac{(\alpha+n\alpha)}{2} = \pi(n-2)\ .$$

Avaldades saadud võrdusest α, saame

$$\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)} \ .$$

Hulknurga kumeruse tõttu

$$n\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n+1} < \pi$$

(teised nurgad on kõik väiksemad) ehk $2n-4 < n+1$, millest $n < 5$. Seega on arvu n võimalikeks väärtusteks $n = 3$ ja $n = 4$.

Juhul $n = 3$ saame $\alpha = \dfrac{2\pi}{3 \cdot 4} = \dfrac{\pi}{6}$, juhul $n = 4$ aga $\alpha = \dfrac{2 \cdot 2\pi}{4 \cdot 5} = \dfrac{\pi}{5}$.

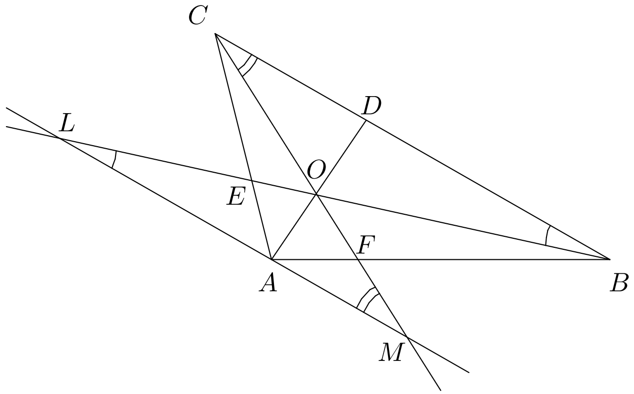
2. Olgu D' ja B' vastavalt vasaku ja parema murru laiendajad liitmisel. Siis $E = AD' + B'C$ ja $F = BD' = DB'$ ning kuna F on ülesande tingimuste põhjal nimetajate vähim ühiskordne, siis arvud B' ja D' on ühistegurita. Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et d on arvude B ja D ühine jagaja. Selleks võtame arvu d suvalise algteguri p ja näitame, et arvud B ja D jaguvad arvu p kõigi nende astmetega, millega jagub arv d.

   Jagugu arv d arvuga p^k, $k > 0$. Siis nii arv E kui ka arv F jaguvad arvuga p^k. Oletame vastuväiteliselt, et arv B ei jagu arvuga p^k. Võrdusest $F = BD'$ saame siis, et arv D' jagub arvuga p. Siis jagub ka arv AD' arvuga p, mistõttu arv $B'C = E - AD'$ jagub arvuga p. Järelikult kas arv B' või arv C jagub arvuga p. Kuna aga arvud B' ja D' on ühistegurita, siis arv B' ei jagu arvuga p. See annab ühelt poolt, et arv C jagub arvuga p, võrduse $F = DB'$ abil aga teiselt poolt, et arv D jagub arvuga p^k. Nii on arv p arvude C ja D ühine algtegur, mis on vastuolus murru taandatusega. Vastuolu tekkis oletusest, et arv B ei jagu arvuga p^k. Analoogiliselt saame vastuolu ka oletusest, et arv D ei jagu arvuga p^k. Niisiis jaguvad arvud B ja D arvuga d.

3. Tõmbame küljega BC paralleelse sirge läbi tipu A ja olgu L ja M selle lõikepunktid vastavalt kiirtega BE ja CF (vt. joonist 6). Siis kolmnurgad AEL ja CEB on sarnased ning kolmnurgad AFM ja BFC on sarnased, millest saame vastavalt $\dfrac{|AE|}{|EC|} = \dfrac{|AL|}{|BC|}$ ja $\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{|AM|}{|BC|}$.

Samuti on sarnased kolmnurgad AOL ja DOB ning AOM ja DOC, mis annab vastavalt $\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AL|}{|BD|}$ ja $\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AM|}{|DC|}$. Võrde omaduse põhjal

$$\begin{aligned} \frac{|AO|}{|OD|} &= \frac{|AL| + |AM|}{|BD| + |DC|} = \frac{|AL| + |AM|}{|BC|} = \\ &= \frac{|AL|}{|BC|} + \frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|} . \end{aligned}$$



Joonis 6

4. Tähistame $\alpha = 1 - x$, siis $x = 1 - \alpha$ ja tingimus $x + y = 2$ annab, et $y = 1 + \alpha$. Siis

$$\begin{aligned} x^2y^2(x^2+y^2) &= (1-\alpha)^2(1+\alpha)^2 \cdot ((1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2) = \\ &= ((1-\alpha)(1+\alpha))^2 \cdot (2 + 2\alpha^2) = \\ &= 2(1-\alpha^2)^2(1+\alpha^2) = 2(1-\alpha^4)(1-\alpha^2) . \end{aligned}$$

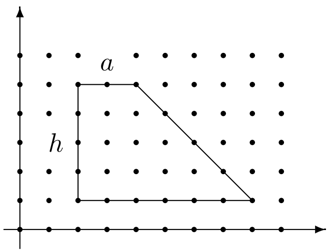
Et arvude x ja y mittenegatiivsuse tõttu $|\alpha| \leqslant 1$, siis $0 \leqslant \alpha^2 \leqslant 1$ ja $0 \leqslant \alpha^4 \leqslant 1$, mistõttu $0 \leqslant 1 - \alpha^2 \leqslant 1$ ja $0 \leqslant 1 - \alpha^4 \leqslant 1$ ning $2(1-\alpha^4)(1-\alpha^2) \leqslant 2$.

5. *Vastus:* a) 7; b) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 16, 28 ja 32.

Olgu vaadeldava trapetsi kõrgus h ning lühema aluse pikkus a (vt. joonist 7). Et trapets koosneb ristkülikust küljepikkustega a ja h ning võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast kaatetite pikkusega h, siis selle pikem alus on pikkusega $a+h$ ning aritmeetilise jada summa valemist saame, et selle külgedel ja sisepiirkonnas on kokku

$$N(a,h) = (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+h+1) = \frac{(2a+h+2)(h+1)}{2}$$

täisarvuliste koordinaatidega punkti.



Joonis 7

a) On ilmne, et kaks vaadeldavat trapetsit on kongruentsed siis ja ainult siis, kui neil on võrdne kõrgus h ja võrdne lühema aluse pikkus a. Seega on vaja leida erinevate paaride (a,h) arv, mille korral $N(a,h) = 2001$. Leiame arvu 2001 lahutuse algteguriteks: $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ ning vaatleme eraldi kahte juhtu.

1) Kui $h = 2k$ on paarisarv, siis

$$N(a,h) = (a+k+1) \cdot (2k+1) ,$$

kus $2k+1 \geqslant 3$ ning $a+k+1 > k+1 > \dfrac{2k+1}{2}$. Tegur $2k+1$ võib seega olla 3, 23 või 29, milles leiame vastavalt $a = 665$ ja $h = 2$, $a = 75$ ja $h = 22$ ning $a = 54$ ja $h = 28$.

2) Kui $h = 2k-1$ on paaritu arv, siis

$$N(a,h) = (2a+2k+1) \cdot k ,$$

kus $k \geqslant 1$ ning $2a+2k+1 \geqslant 2k+3$. Tegur k võib seega olla 1, 3, 23 või 29, milles leiame vastavalt $a = 999$ ja $h = 1$, $a = 330$ ja $h = 5$, $a = 20$ ja $h = 45$ ning $a = 5$ ja $h = 57$.

Vastavalt eespool tehtud tähelepanekule leidub niisiis 7 paarikaupa mittekongruentset ülesande tingimustele vastavat trapetsit suurusega 2001.

b) Võttes järjest $h = 1, 2, 3, \ldots$ leiame trapetsi suuruse sõltuvuse a väärtusest vastava h korral (kui $h > 7$, siis $N(a, h) > 50$ mistahes $a \geqslant 1$ korral):

h	$N(a, h)$
1	$2a + 3$
2	$3a + 6$
3	$4a + 10$
4	$5a + 15$
5	$6a + 21$
6	$7a + 28$
7	$8a + 36$

Nüüd on lihtne kontrollida, et täisarvudest 1 kuni 49 ei esitu ühegi leitud valemiga arvud 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 16, 28 ja 32.

XII klass

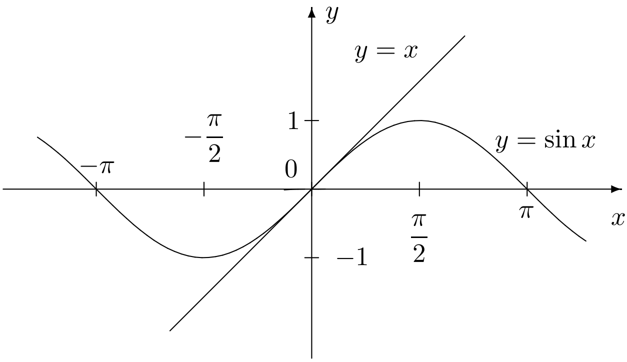
1. *Vastus:* $x = y = 0$ on ainus lahend.

   Lahendus 1: Üheks lahendiks on ilmselt $x = y = 0$. Tõestamaks, et rohkem lahendeid ei ole, paneme tähele, et $|\sin x| \leqslant |x|$, kusjuures võrdus kehtib ainult $x = 0$ korral. See on ilmne siinusfunktsiooni graafikust (vt. joonist 8), kui arvestada, et $|\sin x| \leqslant 1$ ning $\sin x$ tuletis kohal $x = 0$ on $\cos 0 = 1$, s.t. sirge $y = x$ on siinusfunktsiooni graafiku puutujaks kohal $x = 0$.

   Niisiis

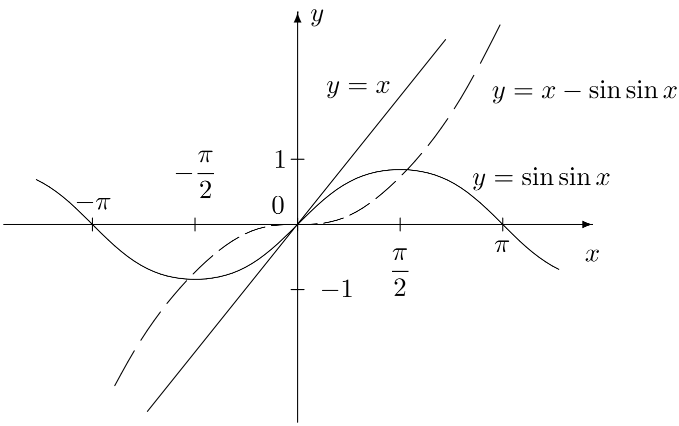
   $$|x| \geqslant |\sin x| = |y| \geqslant |\sin y| = |x| ,$$

   kusjuures vähemalt üks võrratustest on range, kui x ja y ei ole mõlemad võrdsed nulliga. Seega on $x = y = 0$ süsteemi ainsaks lahendiks.



Joonis 8

Lahendus 2: Paneme tähele lahendi $x = y = 0$ olemasolu ning seda, et $|x| = |\sin y| \leqslant 1$. Asendades $y = \sin x$ teise võrrandisse saame $x = \sin \sin x$.



Joonis 9

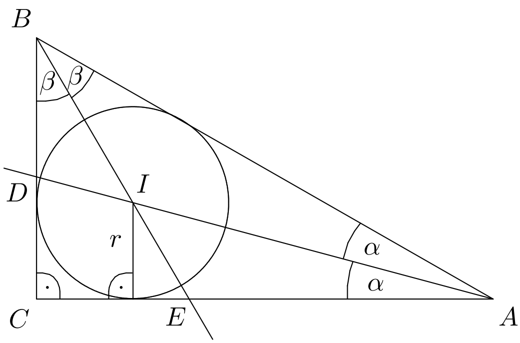
Olgu $f(x) = x - \sin \sin x$, siis $f'(x) = 1 - \cos \sin x \cdot \cos x$. Kuna $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ning ka $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, siis vastavad koosinuse väärtused sisalduvad lõigul $[0,1]$, kusjuures need koosinuse väärtused on võrdsed arvuga 1 ainult juhul $x=0$. Niisiis $f'(x)\geqslant 0$ lõigul $x\in[-1,1]$, kusjuures on vaid üks punkt, kus $f'(x)=0$. Seetõttu on funktsioon $f(x)$ lõigul $[-1,1]$ rangelt kasvav, millest järeldub, et $x=0$ on funktsiooni $f(x)$ ainus nullkoht sellel lõigul (vt. joonist 9). Seega $x=0$ ja $y=\sin 0=0$ on süsteemi ainsaks lahendiks.

2. *Vastus:* n.

   Olgu valitud arvud $a_1,\ \dots,\ a_k$ ning olgu iga $i=1,\dots,k$ korral n_i algarvu 2 astendaja arvu a_i algteguriteks lahutuses, s.t. $a_i=2^{n_i}\cdot b_i$, kus b_i on paaritu arv. Et $1\leqslant b_i\leqslant 2n-1$, siis on arvude b_i jaoks n erinevat võimalust ning $k\geqslant n+1$ korral leiduvad sellised indeksid i ja j, et $b_i=b_j=b$ ja $n_i>n_j$. Siis arv $a_i=2^{n_i}\cdot b$ jagub arvuga $a_j=2^{n_j}\cdot b$.
   Kui $k\leqslant n$, siis valides suvalised k arvu alamhulgast $\{\,n+1,\ \dots,\ 2n\,\}$, ei jagu ükski neist arvudest ühegi teisega, kuna $2n<2\cdot(n+1)$.

3. Olgu $\alpha=\angle IAE=\angle BAI$ ja $\beta=\angle DBI=\angle IBA$ (vt. joonist 10). Siis $\angle EIA=\angle BID=\alpha+\beta$ (kolmnurga ABI välisnurk). Kasutades siinusteoreemi kolmnurgas AEI ja võrdust $r=|AI|\sin\alpha$, saame

$$\frac{|AE|}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{|AI|}{\sin\angle AEI}=\frac{r}{\sin\alpha\sin\angle AEI}\ .$$



Joonis 10

Kolmnurgast BDI saame analoogiliselt

$$\frac{|BD|}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{|BI|}{\sin\angle IDB} = \frac{r}{\sin\beta\sin\angle IDB} .$$

Arvestades võrdusi $\sin\angle AEI = \cos\beta$ ja $\sin\angle IDB = \cos\alpha$ saame

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{r\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{r\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{r} .$$

4. Kui $a = 2$, sobib näiteks $p = 11$, sest

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89 .$$

Kui $a > 2$, siis $a - 1 > 1$ ning seega leidub algarv p, millega arv $a - 1$ jagub. Siis arv a annab arvuga p jagades jäägi 1, mistõttu arv $M_p = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ jagub arvuga p (summas on p liidetavat, mis kõik annavad arvuga p jagades jäägi 1). Et $p > 1$, siis $M_p \geqslant 1 + a > p$ ning M_p on seega kordarv.

5. a) Olgu tabeli esimese, teise ja kolmanda rea arvude summad vastavalt r_1, r_2 ja r_3 ning esimese, teise ja kolmanda veeru arvude summad vastavalt v_1, v_2 ja v_3. Olgu a_{ij} tabeli i-nda rea ja j-nda veeru element. Paneme ka tähele, et vastavalt ülesande tingimustele on kõik arvud tabelis mittenegatiivsed.

Ilmselt $r_1 + r_2 + r_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Siit

$$\begin{aligned} a_{11} &= |r_1 - v_1| = |(r_2 + r_3) - (v_2 + v_3)| = |(r_2 - v_2) + (r_3 - v_3)| = \\ &= \pm|r_2 - v_2| \pm |r_3 - v_3| = \pm a_{22} \pm a_{33} . \end{aligned}$$

Kuna kõik tabeli arvud on mittenegatiivsed, ei saa siin mõlema arvu ees olla miinusmärk ning seega on arv a_{11} tõepoolest võrdne kahe tabelis oleva arvu summa või vahega. Tõestus kõigi ülejäänud arvude jaoks on analoogiline.

b) Sobivad näiteks kõik tabelid (ning neist ridade ja veergude ümberpaigutamisel saadavad tabelid) kujul

0	x	0
x	0	x
0	x	0

ja

x	x	x
x	x	x
$2x$	$2x$	$2x$

,

kus x on positiivne reaalarv.