Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Juku pidi klassi ees lahendama matemaatikaülesande. Eelmist ülesannet tahvlilt pühkides kustutas ta aga kogemata ka osa enda ülesandest: tahvlile jäänud tekst on $37 \cdot (72 + 3x) = 14{*}{*}45$, kus $*$ tähistab kustutatud numbrit. Näita, et Juku saab sellegipoolest oma ülesande lahendada (teades, et x peab olema täisarv).

2. Kolmekohalise arvu jagamisel sellest sajaliste ja üheliste numbri vahetamisel saadud arvuga saame jagatiseks 3 ja jäägiks selle kolmekohalise arvu numbrite summa. Leia kõik niisugused kolmekohalised arvud.

3. Ringjoon raadiusega 10 puutub ruudu kaht lähiskülge ning selle lõikepunktid ruudu kahe ülejäänud küljega on ringjoone mingi diameetri otspunktideks. Leia ruudu küljepikkus.

4. On teada, et võrrandil

$$|x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - 2001| = a$$

on täpselt üks lahend. Leia a väärtus.

5. Tabel, mis koosneb 9 reast ja 2001 veerust, täidetakse naturaalarvudega $1, 2, \ldots, 2001$ nii, et iga arv esineb tabelis täpselt 9 korda ning ühes ja samas veerus paiknevad arvud ei erine üksteisest rohkem kui 3 võrra. Leia vähima veerusumma (ühes veerus paiknevate arvude summa) suurim võimalik väärtus.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

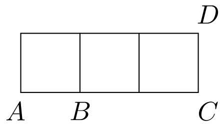
X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kumera n-nurga sisenurkade hulgas on täpselt kolm nürinurka. Leia n kõik võimalikud väärtused.

2. Leia vähim niisugune n, mille korral mistahes n täisarvu seas leidub kolm sellist, mille summa jagub 3-ga.

3. Joonisel on kujutatud kolm ruutu. Leia nurkade ADC ja BDC suuruste summa.



4. Nimetame positiivsete täisarvude kolmikut (a, b, c) *harmooniliseks*, kui $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Tõesta, et mistahes fikseeritud positiivse täisarvu c korral on harmoonilisi kolmikuid (a, b, c) samapalju kui arvu c^2 positiivseid jagajaid.

5. Aafrikas elava Abababi hõimu naaberhõim kasutab tähestikust samuti ainult tähti A ja B. Sõnade moodustamisel kehtivad aga nende keeles järgmised ranged reeglid:
   (1) A on sõna;
   (2) kui w on sõna, siis ka ww ja $w\overline{w}$ on sõnad, kus $\overline{w}$ saadakse sõnast w kõigi tähtede A asendamisel tähtedega B ja kõigi tähtede B asendamisel tähtedega A (xy tähistab x ja y järjest kirjutamist);
   (3) kõik sõnad on konstrueeritavad reeglite (1) ja (2) põhjal.

   Tõesta, et mistahes kaks ühepikkust sõna selles keeles erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kumera n-nurga sisenurkade suurused on α, 2α, $\ldots$, $n\alpha$. Leia n kõik võimalikud väärtused ja α väärtus iga sellise n korral.

2. Õpilane kirjutas tahvlile õige liitmistehte

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{E}{F}\,,$$

kus mõlemad liidetavad on taandatud murrud ning summa nimetaja F on liidetavate nimetajate B ja D vähim ühiskordne. Seejärel taandas ta summaks saadud murru $\dfrac{E}{F}$ õigesti täisarvuga d. Tõesta, et d on liidetavate nimetajate B ja D ühine tegur.

3. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et lõikudel AD, BE ja CF on ühine punkt O. Tõesta, et

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}\,.$$

4. Olgu x ja y sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $x + y = 2$. Tõesta, et $x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2$.

5. Vaatleme koordinaattasandil kõikvõimalikke trapetseid, mille sisenurkade suurused on 90°, 90°, 45° ja 135° ning mille alused on paralleelsed ühe koordinaatteljega ja kõikide tippude koordinaadid on täisarvud. Nimetame sellise trapetsi *suuruseks* selle sisepiirkonnas ja rajajoonel paiknevate täisarvuliste koordinaatidega punktide koguarvu.
   a) Kui palju leidub paarikaupa mittekongruentseid (s.t. selliseid, mida ei saa nihutamise, pööramise ja peegeldamisega üksteiseks teisendada) kirjeldatud omadustega trapetseid suurusega 2001?
   b) Leia kõik 50-st väiksemad positiivsed täisarvud, mis ei ole ühegi niisuguse trapetsi suuruseks.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x \end{cases} .$$

2. Leia suurim niisugune k, mille korral saab naturaalarvude 1 kuni $2n$ hulgast valida välja k arvu nii, et ükski valitud arvudest ei jagu ühegi teise valitud arvuga.

3. Olgu I ja r vastavalt täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ja raadius. Teravnurkade tippudest tõmmatud kiired AI ja BI lõikavad vastaskaateteid BC ja AC vastavalt punktides D ja E. Tõesta, et

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{r} .$$

4. Tõesta, et iga täisarvu $a > 1$ jaoks leidub niisugune algarv p, et

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$$

on kordarv.

5. Igasse 3×3 tabeli ruutu kirjutatakse üks reaalarv nii, et igas ruudus olev arv on võrdne selle rea arvude summa ja selle veeru arvude summa vahe absoluutväärtusega.
   a) Tõesta, et iga arv tabelis esitub mingi kahe tabelis oleva arvu summa või vahena.
   b) Näita, et tabeli saab ülesande tingimuste kohaselt täita nii, et sellesse kirjutatavad arvud ei ole kõik nullid.