XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 30 марта 2000 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Исполнительный директор АО “Пузырь”, фирмы-посредника по продаже мыльных пузырей, воздушных замков и дырок в сыре, обвинил агента по продажам в лени, утверждая, что объем продаж фирмы в декабре по сравнению с октябрем понизился больше чем на 10%. В ответ агент написал в своем квартальном отчете, что хотя в первой половине каждого месяца, по сравнению со второй половиной предыдущего месяца, продажи уменьшались на 30%, зато во второй половине каждого месяца, по сравнению с первой половиной того же месяца, продажи возрастали на 35%. Ошибся ли директор, если отчет агента верный?

2. В трехзначном положительном целом числе M число сотен меньше числа десятков, а число десятков меньше числа единиц. Арифметическое среднее числа M и всевозможных трехзначных чисел, полученных из него перестановками цифр, оканчивается на 5. Найти все такие трехзначные числа M.

   Арифметическим средним чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

3. Найдутся ли такие (необязательно положительные) целые числа m и n, что
   а) $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{m-n}$?
   б) $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n-m}$?

4. На стороне AC треугольника ABC выбирают произвольную, отличную от вершин A и C, точку D. Пусть O_1 и O_2 центры описанных окружностей треугольников ABD и CBD соответственно. Доказать, что треугольники O_1DO_2 и ABC подобны.

5. На плоскости задано 2000 прямых. Доказать, что среди них найдутся две такие, у которых одинаковое число различных точек пересечения с остальными прямыми.

XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 30 марта 2000 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На пост старейшины леса баллотируются три кандидата: Медведь, Еж и Заяц. Каждый из 20 жителей леса написал в своем избирательном бюллетене имена всех троих кандидатов в порядке предпочтения. При подведении итогов выяснилось, что 11 жителей предпочитают Медведя Ежу, 12 жителей — Зайца Медведю и 14 жителей — Ежа Зайцу. Кто из кандидатов назван первым в наибольшем числе бюллетеней, если известно, что каждое возможное упорядочение кандидатов встречается по крайней мере в одном бюллетене?

2. Какое из чисел 2^{2002} и 2000^{200} больше?

3. Доказать, что если числа a, b, c, d удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2cd \\ b^2 + c^2 = 2da \\ c^2 + d^2 = 2ab \end{cases},$$

то $a = b = c = d$.

4. Точка E — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, а точка F — основание перпендикуляра, проведенного из точки B к прямой CE. Доказать, что треугольник ABF равнобедренный.

5. Из 2000 заданных на плоскости прямых в красный цвет красят все те, у которых нечетное число различных точек пересечения с остальными прямыми.
   а) Может ли число красных прямых быть нечетным, если среди заданных на плоскости прямых нет параллельных?
   б) Может ли число красных прямых быть нечетным, если никакие три прямые из заданных не пересекаются в одной точке?

XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 30 марта 2000 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все простые числа, шестая степень которых при делении на 504 не дает в остатке 1.

2. Пусть $PQRS$ вписанный четырехугольник, в котором $\angle PSR=90^\circ$, и пусть точки H и K — основания перпендикуляров, проведенных из точки Q соответственно на прямые PR и PS. Доказать, что прямая HK проходит через середину отрезка SQ.

3. Найти все значения a, при которых уравнение $x^3-x+a=0$ имеет три различных целочисленных решения.

4. Определим последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ следующими соотношениями: $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, а $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$ и $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. Найти все различные простые сомножители числа $a_{2000}+b_{2000}$.

5. У каждого из математиков M и N имеется свой любимый сборник теорем, который он часто использует в своей работе. Однажды они решили сыграть между собой в игру, в которой каждый из математиков на каждом своем ходу доказывает произвольную такую теорему из своего сборника, которая еще не была доказана в ходе игры. Ходы делаются по очереди, начинает математик M. Выигрывает тот, кто первым докажет все теоремы из своего сборника; если же из обоих сборников все теоремы будут доказаны одновременно, то побеждает математик, доказавший последнюю теорему.

   Пусть у математика M в сборнике m теорем. Найти все возможные значения m, при которых у математика M существует выигрышная стратегия, если известно, что у математика N в сборнике 222 теоремы и 101 из них имеются также в сборнике математика M.

XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 30 марта 2000 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть $x \neq 1$ фиксированное положительное число и a_1, a_2, a_3, $\ldots$ некоторая числовая последовательность. Доказать, что $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \ldots$ является непостоянной геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда a_1, a_2, a_3, $\ldots$ непостоянная арифметическая прогрессия.

2. Первая строка бесконечной треугольной таблицы содержит одно число, вторая строка — два числа, третья строка — три числа и т.д. При этом в любой k-ой строке ($k = 1, 2, 3, \ldots$) на первом и последнем местах находится число k, а любое другое число в таблице определяется как наименьшее общее кратное чисел, стоящих над ним в предыдущей строке (на рисунке показаны пять первых строк этой таблицы). Выберем в таблице произвольные два таких числа, которые не стоят в своей строке ни на первом, ни на последнем местах. Доказать, что одно из выбранных чисел делится на другое.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 2 & & 3 & & \\
 & 4 & & 6 & & 6 & & 4 & \\
5 & & 12 & & 6 & & 12 & & 5 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

3. Пусть ABC остроугольный треугольник, в котором $\angle ACB = 60^\circ$, и пусть его высоты AD и BE пересекаются в точке H. Доказать, что центр описанной около треугольника ABC окружности находится на прямой, делящей пополам углы AHE и BHD.

4. Доказать, что для произвольного треугольника выполняется равенство
$$a \cdot \cos(\beta + \gamma) + b \cdot \cos(\gamma + \alpha) + c \cdot \cos(\alpha - \beta) = 0\ ,$$
где a, b, c — длины сторон треугольника, а α, β, γ — величины противолежащих углов соответствующих этим сторонам.

5. На плоскости проводят n прямых, делящих плоскость на некоторое число конечных и бесконечных частей. При каком наименьшем числе прямых n среди этих частей может оказаться больше конечных чем бесконечных?