# Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 30. märtsil 2000. a.

Lahendused ja vastused

## IX klass

1. *Vastus:* tegevdirektoril oli siiski õigus.

   *Lahendus.* Olgu oktoobri esimese poole müügimaht $x$, siis oktoobri teise poole müügimaht on sellest 35% võrra suurem ehk $1{,}35x$ ning novembri esimese poole müügimaht sellest omakorda 30% võrra väiksem ehk $0{,}7 \cdot 1{,}35x = 0{,}945x$. Kuna kummagi terve kuu müügimaht on võrdne $1+1{,}35 = 2{,}35$ korda vastava kuu esimese poole müügimahuga, siis võime järeldada, et ka terve novembrikuu müügimaht on võrdne 0,945 korda terve oktoobrikuu müügimahuga. Et samasugune arutlus kehtib ka novembri- ja detsembrikuu jaoks, siis detsembrikuus müüs firma $0{,}945^2 = 0{,}893025$ korda niipalju kui oktoobris ning järelikult vähenes müük oktoobriga võrreldes tõepoolest veidi rohkem kui 10% võrra.

2. *Vastus:* selliseid arve on kaheksa: 159, 168, 249, 258, 267, 357, 348 ja 456.

   *Lahendus.* Olgu otsitav arv $M = \overline{abc}$, siis selle numbrite ümberpaigutamise teel saadud 5 arvu on $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}$ ja $\overline{cba}$. Arvestades, et $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$, leiame aritmeetilise keskmise

$$k = \frac{\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}}{6} = \frac{222(a+b+c)}{6} = $$
$$= 37(a+b+c)\ .$$

   Arv $k = 37(a+b+c)$ lõpeb numbriga 5 siis ja ainult siis, kui $a+b+c=5$, $a+b+c=15$ või $a+b+c=25$. Esimene ja viimane juht on ülesande tingimuste tõttu võimatud, sest numbrid $a$, $b$ ja $c$ peavad olema erinevad. Arvu 15 esitamiseks kolme erineva ja nulliga mittevõrduva numbri summana on 8 võimalust:

$$15 = 1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 = 2+5+8 =$$

$$= 2 + 6 + 7 = 3 + 5 + 7 = 3 + 4 + 8 = 4 + 5 + 6 .$$

Seega on otsitavateks arvudeks 159, 168, 249, 258, 267, 357, 348 ja 456.

3. *Vastus:* a), b) ei leidu.

   *Lahendus 1.* a) Korrutades antud võrduse mõlemaid pooli arvuga $mn(m-n)$ saame võrrandi $n^2 + m^2 - nm = 0$. Kuna $m = 0$ ei saa olla algse võrrandi lahendiks, võime viimase võrduse mõlemaid pooli jagada arvuga $m^2$, kust tähistades $x = \frac{n}{m}$ saame $x^2 - x + 1 = 0$. Selle ruutvõrrandi diskriminant on $1 - 4 \cdot 1 = -3$ ning järelikult ei saa tal olla reaalarvulisi lahendeid.

   b) Korrutades võrduse mõlemaid pooli arvuga $mn(n-m)$ saame võrrandi $n^2 + m^2 - 3mn = 0$, millel ei ole täisarvulisi lahendeid. Selles võime veenduda analoogiliselt eelmise osa lahendusega. Kuna $m = 0$ ei saa olla algse võrrandi lahendiks, võime viimase võrduse mõlemaid pooli jagada arvuga $m^2$, kust tähistades $x = \frac{n}{m}$ saame $x^2 - 3x + 1 = 0$. Selle ruutvõrrandi lahendid on $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, mis pole ratsionaalarvud ega esitu järelikult kahe täisarvu jagatisena.

   *Lahendus 2.* a) Korrutades võrduse pooli arvuga $mn(n-m)$, saame tulemuse kirjutada nii kujul

   $$(n-m)^2 = -mn$$

   kui ka kujul

   $$n^2 + m^2 = mn .$$

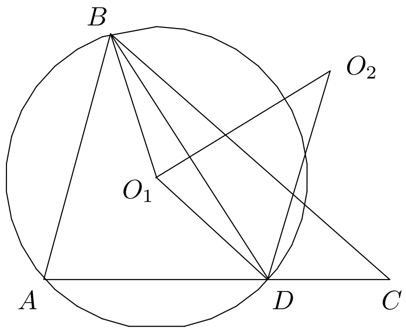
   Kummagi võrduse vasak pool on positiivne, paremad pooled on aga erimärgilised — vastuolu.

   b) Samuti nagu lahenduses 1 teisendame antud võrrandi kujule $n^2 + m^2 - 3mn = 0$. Veendume, et sellel võrrandil ei ole täisarvulisi lahendeid. Tõepoolest, leidugu sellised täisarvud $n = 3^p \cdot s$ ja $m = 3^q \cdot t$, kus $p$, $q \geqslant 0$ ning $s$ ja $t$ ei jagu 3-ga. Eeldades üldisust kitsendamata, et $p \geqslant q$, saame $n^2 + m^2 = 3^{2q} \cdot u$ ning $3mn = 3^{p+q+1} \cdot v$, kus $u$ ja $v$ ei jagu 3-ga. Seega $p = q - 1$, mis on vastuolus tehtud eeldusega $p \geqslant q$.

4. Tähistame $\angle BAC = \alpha$. Vaadeldes kolmnurga $ABD$ ümberringjoont paneme tähele, et nurgad $BAD$ ja $BO_1D$ on ühele ja samale kõõlule $BD$ toetuvad piirde- ja kesknurk (vt. joonist 1). Järelikult $\angle BO_1D = 2\angle BAD = 2\alpha$. Kuna sirge $O_1O_2$ on lõigu $BD$ keskristsirge, siis on ta ka nurga $BO_1D$ poolitaja, seega

$$\angle O_2O_1D = \frac{1}{2}\angle BO_1D = \alpha = \angle BAC\ .$$

Analoogiliselt veendume, et $\angle O_1O_2D = \angle BCA$, ning järelikult on kolmnurgad $O_1DO_2$ ja $ABC$ sarnased.




Joonis 1

5. Igal sirgel võib olla ülejäänud sirgetega 0 kuni 1999 erinevat lõikepunkti. Kui mingil sirgel on ülejäänutega 0 lõikepunkti, siis on ta paralleelne kõigi ülejäänud sirgetega, mis tähendab, et kõik sirged on omavahel paralleelsed ja igal sirgel on 0 lõikepunkti ülejäänud sirgetega. Kui see aga nii ei ole (ei leidu sirget, millel oleks ülejäänutega 0 lõikepunkti), siis on antud 2000 sirge jaoks võimalikud lõikepunktide arvud $1, 2, \ldots, 1999$, mistõttu peab leiduma kaks sirget, millel on ülejäänutega ühepalju erinevaid lõikepunkte.

## X klass

1. *Vastus:* Siil.

   *Lahendus.* Olgu kuue võimaliku järjestuse (KSJ, KJS, SKJ, SJK, JKS ja JSK) esinemise arvud vastavalt $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ — siis ülesande tingimustest saame võrrandid

$$\begin{aligned} a+b+e &= 11, \\ d+e+f &= 12, \\ a+c+d &= 14 \end{aligned}$$

ning tingimust $a+b+c+d+e+f=20$ arvestades ka

$$\begin{aligned} c+d+f &= 9, \\ a+b+c &= 8, \\ b+e+f &= 6. \end{aligned}$$

Liites viienda ja kuuenda võrrandi saame $a+2b+c+e+f=14$. Lahutades siit esimese võrrandi, saame seose $b+f+c=3$, kust tingimuse $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f \geqslant 1$ tõttu $b=f=c=1$ ning $a=6$, $e=4$ ja $d=7$. Seega on Karu esikohal $a+b=7$ sedelil, Siil $c+d=8$ sedelil ja Jänes $e+f=5$ sedelil.

2. *Vastus:* $2^{2002} < 2000^{200}$.

   *Lahendus.* Paneme tähele, et mõlemad ülesandes antud arvud jaguvad arvuga $16^{200}=2^{800}$. Jagades mõlemad selle suurusega läbi, tuleb võrrelda arve $2^{1202}=4^{601}$ ja $(5^3)^{200}=5^{600}$. Veendumaks, et $4^{601}<5^{600}$, piisab tõestada, et $4^9<5^8$. See järeldub näiteks järgmistest võrratustest:

   $$4^9 = 4^6\cdot 64 = 8^4\cdot 64 < 8^4\cdot 81 = 8^4\cdot 3^4 = 24^4 < 25^4 = 5^8.$$

3. Liites süsteemi esimese ja kolmanda võrrandi, saame võrduse

   $$a^2+b^2+c^2+d^2 = 2cd+2ab\,,$$

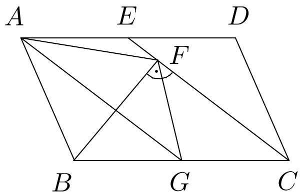
   mis on samaväärne võrdusega

   $$(a-b)^2+(c-d)^2=0\,.$$

   Järelikult $a=b$ ja $c=d$. Süsteemi teise võrrandi võime nüüd kirjutada kujul $a^2+c^2=2ac$ ehk $(a-c)^2=0$, millest järeldub, et $a=c$. Seega $a=b=c=d$.

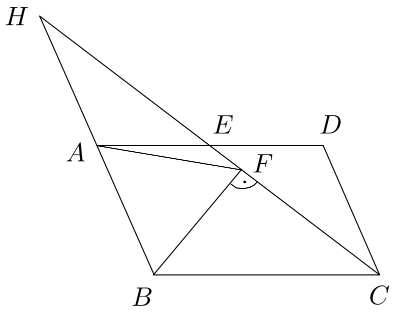
4. *Lahendus 1.* Olgu $G$ lõigu $BC$ keskpunkt (vt. joonist 2). Kuna $\angle BFC=90^\circ$, siis $G$ on kolmnurga $BCF$ ümberringjoone keskpunkt

ja $BG = GF$. Et $AG \parallel EC$, siis $AG \perp BF$ ning sirge $AG$ on järelikult lõigu $BF$ keskristsirge. Seega $AB = AF$ ja kolmnurk $ABF$ on võrdhaarne.




Joonis 2

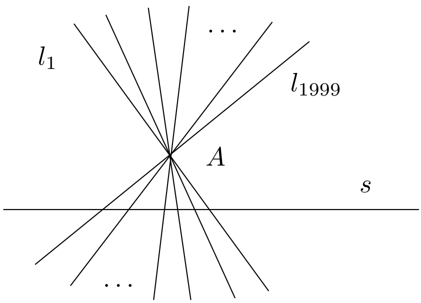
*Lahendus 2.* Pikendame lõike $AB$ ja $CE$ lõikumiseni punktis $H$ (vt. joonist 3). Et kolmnurkade $HBC$ ja $HAE$ vastavad küljed on paralleelsed, siis on need kolmnurgad sarnased sarnasusteguriga $\dfrac{|BC|}{|AE|} = 2$. Järelikult ka $|HB| = 2 \cdot |HA|$ ja $|HA| = |AB|$. Kuna kolmnurk $HFB$ on täisnurkne, on lõik $HB$ tema ümberringjoone diameeter ning punkt $A$ ümberringjoone keskpunkt, mistõttu $|AH| = |AF| = |AB|$.




Joonis 3

5. *Vastus:* a) jah; b) ei.

   *Lahendus.* a) Valime tasandil punkti $A$ ning tõmbame 1999 sirget $l_1, \ldots, l_{1999}$ läbi punkti $A$ ja veel ühe sirge $s$, mis ei läbi punkti $A$ ega ole paralleelne ühegagi sirgetest $l_i$ (vt. joonist 4). Siis igaühel sirgetest $l_i$ on ülejäänutega 2 erinevat lõikepunkti, sirgel $s$ aga 1999 erinevat lõikepunkti. Seega on $s$ ainus punane sirge.




Joonis 4

b) Et vastavalt ülesande tingimustele ei lõiku ükski vaadeldavate sirgete kolmik ühes punktis, siis kuulub iga lõikepunkt täpselt kahele sirgele. Lugedes kokku iga sirge lõikepunktid ülejäänud sirgetega ja liites kõik saadud arvud, saame seega tulemuseks kahekordse lõikepunktide koguarvu. See summa on niisiis paarisarv ning järelikult sisaldab paarisarvu paarituarvulisi liidetavaid (mis vastavad punastele sirgetele).

## XI klass

1. *Vastus:* $2$, $3$ ja $7$.

   *Lahendus 1.* Kuna $504 = 2^3 \cdot 7 \cdot 3^2$, siis arvud $2^6$, $3^6$ ja $7^6$ omavad 504-ga ühistegurit ning seega ei anna need arvud 504-ga jagades jäägiks $1$. Olgu $p$ suvaline muu algarv: siis $p$ on nii 7-ga, 8-ga kui 9-ga ühistegurita. Kõikvõimalikke jääke läbi vaadates leiame, et $p^6$ annab nii 7-ga, 8-ga kui 9-ga jagades jäägi $1$. Seega arv $p^6 - 1$ jagub 7-ga, 8-ga ja 9-ga. Et $7$, $8$ ja $9$ on paarikaupa ühistegurita, jagub $p^6 - 1$ arvuga $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Seega $p^6$ annab 504-ga jagades jäägi $1$.

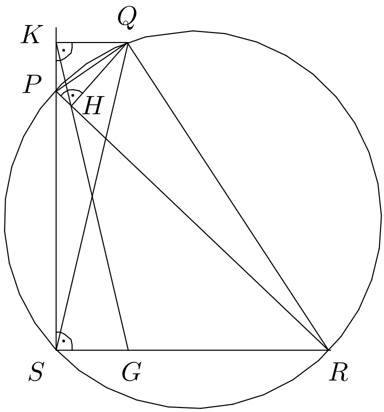
   *Lahendus 2.* Olgu $p$ algarv, mis ei võrdu 2-ga, 3-ga ega 7-ga. Tõestame, et sel juhul jagub arv $p^6 - 1$ arvudega $7$, $8$ ja $9$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} p^6 - 1 &= (p^3 - 1)(p^3 + 1) = \\ &= (p-1)(p+1)(p^2+p+1)(p^2-p+1)\ . \end{aligned}$$

Kuna $p \neq 2$, siis on $p-1$ ja $p+1$ paarisarvud, millest üks jagub 2-ga ja teine 4-ga; järelikult jagub $p^6-1$ arvuga $8$. Kuna $p \neq 3$, siis jagub arvudest $p-1$ ja $p+1$ täpselt üks 3-ga. Kui $p-1$ jagub 3-ga, siis ka $p^2+p+1=(p-1)^2+3(p-1)+3$ jagub 3-ga; kui $p+1$ jagub 3-ga, siis ka $p^2-p+1=(p+1)^2-3(p+1)+3$ jagub 3-ga. Järelikult jagub kogu korrutis 9-ga. Tõestamaks, et $p^6-1$ jagub 7-ga, lahutame kahest viimasest ülalleitud tegurist arvu $7$: kogu korrutise jaguvus 7-ga sellest ei muutu. Kaks viimast tegurit omandavad kuju $p^2+p-6=(p-2)(p+3)$ ja $p^2-p-6=(p-3)(p+2)$. Seega jagub $p^6-1$ arvuga $7$ parajasti siis, kui 7-ga jagub korrutis

$$(p-3)(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)(p+3)\ .$$

Kuna $p \neq 7$ ja seitsmest jäjestikusest arvust peab üks jaguma 7-ga, on ülesande väide tõestatud.




Joonis 5

2. Olgu sirgete $HK$ ja $SR$ lõikepunkt $G$ (vt. joonist 5). Ülesande tingimuste põhjal asuvad punktid $P$, $Q$, $R$ ja $S$ ühel ringjoonel. Kuna $\angle PHQ = \angle PKQ = 90^\circ$, siis asuvad ka punktid $K$, $Q$, $H$ ja $P$ ühel ringjoonel. Seega

$$\angle QKG = \angle QKH = \angle QPH = \angle QPR = \angle QSG\ .$$

Niisiis asuvad punktid $K$, $Q$, $S$ ja $G$ ühel ringjoonel, kusjuures

$\angle KSG = \dfrac{\pi}{2} = \angle SKQ$. Järelikult on nelinurk $KQGS$ ristkülik ning selle diagonaalid $KH$ ja $QS$ poolitavad teineteise. Seega sirge $KH$ läbib lõigu $QS$ keskpunkti.

3. *Vastus:* $a = 0$ on ainus selline arv.

*Lahendus 1.* Olgu $a$ nõutava omadusega arv. Kuna funktsioon

$$f(x) = x^3 - x + a = (x-1) \cdot x \cdot (x+1) + a$$

on piirkondades $x \leqslant -1$ ja $x \geqslant 1$ rangelt kasvav, siis võib võrrandil $x^3 - x + a = 0$ olla kummaski neist piirkondadest ülimalt üks lahend. Seega vähemalt üks kolmest lahendist peab paiknema piirkonnas $-1 < x < 1$. Et ainus täisarv selles piirkonnas on $0$, siis on $0$ võrrandi $x^3 - x + a = 0$ lahendiks, mistõttu $a = 0$.

Teiselt poolt on võrrandil $x^3 - x = 0$ tõepoolest kolm erinevat täisarvulist lahendit $1$, $0$ ja $-1$.

*Lahendus 2.* Nõutava omadusega arv $a$ saab olla vaid täisarv, kuna vastasel korral ei oleks võrrandil $x^3 - x + a$ täisarvulisi lahendeid. Näitame, et kui arv $a$ rahuldab võrratust $a \geqslant 1$ või $a \leqslant -1$, siis leidub ülimalt üks täisarv $x$, mille korral kehtib võrdus $x^3 - x = -a$.

Olgu $a \geqslant 1$, siis $-a \leqslant -1$. Kui $-1 \leqslant x \leqslant 0$ või $x \geqslant 1$, siis

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \geqslant 0\,,$$

järelikult ei saa neis piirkondades lahendeid olla. Kui $0 < x < 1$, siis $x^2 - 1 > -1$ ja

$$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) > -1$$

ning seega ei leidu ka selles piirkonnas vajalikku arvu $x$. Kui aga $x < -1$, siis on funktsioon $f(x) = x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$ rangelt kasvav ja omandab iga väärtuse ülimalt ühel argumendi väärtusel.

Analoogiliselt tõestame, et ka $a \leqslant -1$ korral leidub ülimalt üks ülesande tingimusi rahuldav täisarv $x$. Järelikult võib sobida vaid $a = 0$, mille korral vastavad $x$ väärtused on $1$, $0$ ja $-1$.

4. *Vastus:* Ainus algtegur on $2$.

*Lahendus.* Tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil, et iga naturaalarvu $n$ korral on arv $a_n + b_n$ arvu 2 mingi täisarvuline aste. $n = 1$ korral on $a_1 + b_1 = 3 + 1 = 4 = 2^2$, seega sel juhul väide kehtib.

Olgu nüüd $a_n + b_n = 2^t$ mingi täisarvu $t \geqslant 1$ jaoks. Siis

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} + a_n \cdot b_n = \frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{2} = \\ &= \frac{(a_n + b_n)^2}{2} = 2^{2t-1}, \end{aligned}$$

seega on ka $a_{n+1} + b_{n+1}$ arvu 2 täisarvuline aste.

5. *Vastus:* Kõik täisarvud alates 101-st kuni 121-ni ja kõik paarisarvud alates 122-st kuni 322-ni.

   *Lahendus.* Nimetame kummagi mängija jaoks tema *omateoreemideks* teoreeme, mis esinevad tema käsiraamatus, kuid mitte tema vastase omas. Vaatame läbi 4 juhtu.

   (1) Olgu $m \leqslant 121$. Siis suvalises partiis saavad M käsiraamatu teoreemid tõestatud ülimalt tema 121. käigul, kuid N omateoreeme on $222 - 101 = 121$, seega need ei saa kõik selleks ajaks tõestatud olla. Järelikult sel juhul M võidab suvalise strateegia korral.

   (2) Olgu $m$ paarisarv ning $121 < m \leqslant 323$. Tõestagu M kõigepealt ainult omateoreeme ja alles siis, kui need on kõik tõestatud, võtku ette ülejäänud. Vaatleme suvalist partiid, milles M on selliselt mänginud. Kuna M omateoreeme on ülimalt $323 - 101 = 222$, jõuab M nad kõik ära tõestada, sest M ei aita kirjeldatud strateegiat kasutades mängijat N tema teoreemide tõestamisel. Seega partii lõpul on M käsiraamatu teoreemid kõik tõestatud. Kui N käsiraamatus on mõni teoreem tõestamata, on M võitnud. Kui ka N käsiraamatu teoreemid on kõik tõestatud, on kokku tehtud $222 + m - 101$ käiku, mis on paaritu arv. Seega M tegi viimase käigu ja on võitnud.

   (3) Olgu $m$ paaritu arv ning $121 < m \leqslant 323$. Tõestagu N kõigepealt ainult omateoreeme ja alles siis, kui need on kõik tõestatud, võtku ette ülejäänud. Vaatleme suvalist partiid, milles N on selliselt mänginud. Kuna N omateoreeme on $222 - 101 = 121$, jõuab N nad kõik ära tõestada, sest N ei aita kirjeldatud strateegiat kasutades mängijat M tema teoreemide tõestamisel. Seega partii lõpul on N käsiraamatu teoreemid kõik tõestatud. Kui M käsiraamatus on mõni teoreem

tõestamata, on M kaotanud. Kui ka M käsiraamatu teoreemid on kõik tõestatud, on kokku tehtud $222 + m - 101$ käiku, mis on paarisarv. Seega N tegi viimase käigu ja M on kaotanud.

(4) Olgu lõpuks $m > 323$. Siis M omateoreeme on rohkem kui $323 - 101 = 222$ ning üheski partiis ei jõua ta neid kõiki selleks ajaks ära tõestada, kui N on ära tõestanud kõik oma käsiraamatu teoreemid. Seega sel juhul M kaotab suvalise strateegia korral.

**XII klass**

1. Olgu $x^{a_1}$, $x^{a_2}$, ... geomeetriline jada teguriga $q \neq 1$. Siis

$$q = \frac{x^{a_{n+1}}}{x^{a_n}} = x^{a_{n+1}-a_n}$$

iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Seega $d = a_{n+1} - a_n = \log_x q$ on arvust 0 erinev konstant ning järelikult on $a_1$, $a_2$, ... mittekonstantne aritmeetiline jada vahega $d$.

Vastupidi, olgu $a_1, a_2, \ldots$ aritmeetiline jada vahega $d \neq 0$. Siis $d = a_{n+1} - a_n$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral ning $q = \dfrac{x^{a_{n+1}}}{x^{a_n}} = x^d$ on arvust 1 erinev konstant. Järelikult on $x^{a_1}$, $x^{a_2}$, ... mittekonstantne geomeetiline jada teguriga $q$.

2. Olgu iga $m \geqslant 2$ korral $L(m) = \text{VÜK}\,(2, 3, \ldots, m)$. Näitame, et vaadeldava arvutabeli kõik arvud peale iga rea esimese ja viimase arvu esituvad kujul $L(m)$, kus $m$ on mingi naturaalarv.

Selleks tõestame kõigepealt matemaatilise induktsiooni abil, et mistahes $k$. rea ($k \geqslant 3$) teine ja eelviimane arv esituvad kujul $L(k-1)$. Juhul $k = 3$ on reas ainult üks "sisemine" arv $2 = L(2)$, mis põhjendab induktsiooni baasi. Sammu tegemiseks oletame, et $k$. rea teine arv on $L(k-1)$. Siis $(k+1)$. rea teine arv on $\text{VÜK}\,(k, L(k-1)) = L(k)$. Analoogilise tõestuse saab läbi viia iga rea eelviimase elemendi jaoks.

Kuna iga $m, n$ korral kehtib võrdus $\text{VÜK}\,(L(m), L(n)) = L(s)$, kus $s = \max(m, n))$, siis on ka mistahes muu "sisemine" arv tabelis sellisel kujul esitatav. Viimase väite tõestuse saame jällegi anda induktsiooniga reanumbri $k$ järgi. Kui $k = 3$ või $k = 4$, kehtib väide ülaltõestatud lause põhjal. Kui $k \geqslant 5$, siis on $k$. rea $l$. element (kus $2 < l < k-1$) leitav $(k-1)$. rea $(l-1)$. ja $l$. elemendi vähima ühiskordsena. Järelikult esitub see element kujul $L(s)$, sest $(k-1)$. rea vastavad elemendid avalduvad induktsiooni eelduse põhjal kujul $L(m)$ ja $L(n)$.

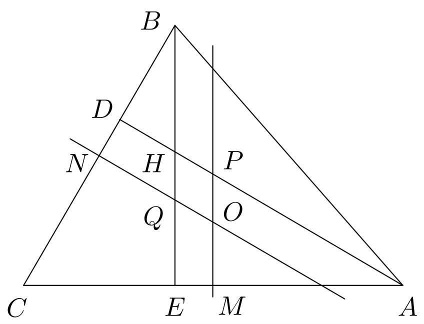
Ülesande väide järeldub nüüd otseselt asjaolust, et mistahes täisarvude $n \geqslant m \geqslant 2$ korral jagub arv $L(n)$ arvuga $L(m)$.

3. Olgu $M$ ja $N$ vastavalt kolmnurga külgede $AC$ ja $BC$ keskpunktid ning $O$ nende külgede keskristsirgete lõikepunkt (ehk kolmnurga $ABC$ ümberringjoone keskpunkt). Üldisust kitsendamata eeldame, et $|AC| \geqslant |BC|$, siis punkt $D$ paikneb lõigul $BN$ ja punkt $E$ paikneb lõigul $MC$ (kui $|AC| = |BC|$, siis $D = N$, $E = M$ ja $O = H$ ning tõestatav väide kehtib triviaalselt). Lõigaku külje $AC$ keskristsirge kõrgust $AD$ punktis $P$ ning külje $BC$ keskristsirge kõrgust $BE$ punktis $Q$ (vt. joonist 6). Piisab näidata, et tekkiv rööpkülik $OPHQ$ on romb (sest rombi diagonaalid on ühtlasi selle nurgapoolitajateks ning seega paikneb rombi tipp $O$ vastasnurga $PHQ$ poolitajal, mida ongi tarvis tõestada).

   Kuna $\angle ACB = 60°$, siis täisnurksest kolmnurgast $ADC$ saame $|CD| = \dfrac{1}{2}|AC| = |CM|$ ning täisnurksest kolmnurgast $BEC$ saame $|CE| = \dfrac{1}{2}|BC| = |CN|$. Niisiis

$$|DN| = |CD| - |CN| = |CM| - |CE| = |EM|\,,$$

   s.t. rööpküliku $OPHQ$ lähisküljedele tõmmatud kõrgused on võrdse pikkusega. Seega on ka selle rööpküliku lähisküljed võrdse pikkusega, s.t. $OPHQ$ on romb.




Joonis 6

4. *Lahendus 1.* Kuna $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, siis $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$ ja tõestatava võrduse võime kirjutada kujul

$$a \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos(\alpha - \beta) + b \cdot \cos(\gamma + \alpha).$$

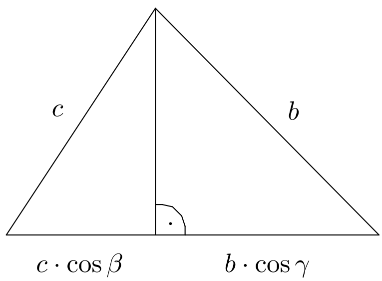
Arvestades, et $c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$ (sest mõlemad need avaldised esitavad kolmnurga küljele $a$ tõmmatud kõrguse pikkust) teisendame saadud võrduse paremat poolt:

$$\begin{aligned} & c \cdot \cos(\alpha - \beta) + b \cdot \cos(\gamma + \alpha) = \\ & \quad = c \cdot \cos\alpha\cos\beta + c \cdot \sin\alpha\sin\beta + b \cdot \cos\gamma\cos\alpha - \\ & \qquad - b \cdot \sin\gamma\sin\alpha = \\ & \quad = c \cdot \cos\alpha\cos\beta + b \cdot \cos\gamma\cos\alpha\ . \end{aligned}$$

Ülesandes nõutud võrduse tõestamiseks piisab nüüd tõestada, et

$$a = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma\ .$$

Selleks tõmbame küljele pikkusega $a$ vastastipust kõrguse ja paneme tähele, et kõrguse aluspunkt jaotab külje osadeks pikkustega $c \cdot \cos\beta$ ja $b \cdot \cos\gamma$ (vt. joonist 7).




Joonis 7

*Lahendus 2.* Siinusteoreemi põhjal $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ ja $c = 2R\sin\gamma = 2R\sin(\alpha + \beta)$, kus $R$ on vaadeldava kolmnurga ümberringjoone raadius. Peale selle $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$ ja $\cos(\gamma + \alpha) = -\cos\beta$. Tehes tõestatavas võrduses vastavad asendused, saame

$$-2R\sin\alpha\cos\alpha - 2R\sin\beta\cos\beta + 2R\sin(\alpha{+}\beta)\cos(\alpha{-}\beta) = 0\,,$$

ehk samaväärselt

$$R \cdot \bigl(2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)\bigr) = 0\,.$$

See võrdus kehtib, sest $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \sin x + \sin y$ mistahes nurkade $x$ ja $y$ korral.

5. *Vastus:* $7$.

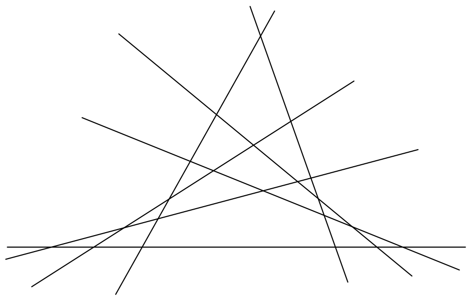
   *Lahendus.* Kui kõik $n$ sirget on omavahel paralleelsed, siis lõplikke tasandiosi ei ole ning iga lõpmatu tasandiosa on pooltasand või kahe sirgega piiratud riba. Mistahes muul juhul vaatleme suurt ringjoont, mille sisse jäävad kõik antud sirgete lõikepunktid. Ringjoonest väljapoole ulatub siis $2n$ mittelõikuvat kiirt, mis moodustavad $2n$ lõpmatut tasandiosa. Olukord, kus kaks sellist osa ringjoone sees "ühinevad", ei ole võimalik, sest kõik sirged ei ole paralleelsed ning seega lõikab iga sirge ringi sees vähemalt ühte ülejäänutest. Seega $n$ sirge korral, mis ei ole kõik paralleelsed, on lõpmatuid tasandiosi alati täpselt $2n$ ning iga uue sirge lisamisel kasvab lõpmatute tasandiosade arv täpselt $2$ võrra.

   Lõplike tasandiosade arvu hindamiseks paneme tähele, et lisatav $k$. sirge lõikab juba olemasolevaid sirgeid maksimaalselt $k-1$ erinevas punktis ning võib seega suurendada tasandiosade koguarvu maksimaalselt $k$ võrra. Et seejuures lisandub kindlasti $2$ lõpmatut tasandiosa, siis võib lõplikke tasandiosi lisanduda ülimalt $k-2$.

   Niisiis saame lõpmatute tasandiosade arvu ja lõplike tasandiosade maksimaalse arvu jaoks $n$ sirge korral (mis ei ole kõik paralleelsed) järgmise tabeli:

| Sirgete arv $n$ | Lõpmatuid osi | Maks. lõplikke osi |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 0 |
| 3 | 6 | 1 |
| 4 | 8 | 3 |
| 5 | 10 | 6 |
| 6 | 12 | 10 |
| 7 | 14 | 15 |

   Niisiis ei saa vähema kui $7$ sirge korral lõplikke tasandiosi olla rohkem kui lõpmatuid. Tõmmates aga 7 sirget mistahes viisil nii, et ükski paar neist ei oleks paralleelsed ega ükski kolmik ei lõikuks ühes punktis, saame alati 15 lõplikku ja 14 lõpmatut tasandiosa (üks selline näide on toodud joonisel 8).



Joonis 8