Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 30. märtsil 2000. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Seebimullide, õhulosside ja juustuaukude vahendusfirma AS Mull tegevdirektor süüdistas müügijuhti laiskuses, väites et firma detsembrikuu müügimaht on oktoobriga võrreldes rohkem kui 10% võrra langenud. Müügijuht seevastu kirjutas oma kvartaliaruandes, et kuigi iga kuu esimeses pooles kahanes müük võrreldes eelmise kuu teise poolega 30% võrra, kasvas see iga kuu teises pooles võrreldes sama kuu esimese poolega 35% võrra. Kas tegevdirektor eksis, kui müügijuhi aruanne vastab tõele?

2. Kolmekohalises positiivses täisarvus M on sajaliste number väiksem kümneliste numbrist ja kümneliste number väiksem üheliste numbrist. Arvu M ja temast numbrite ümberjärjestamise teel saadud kõikvõimalike kolmekohaliste arvude aritmeetiline keskmine lõpeb numbriga 5. Leia kõik sellised kolmekohalised arvud M.

   Arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeetiline keskmine on $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

3. Kas leiduvad sellised (mitte tingimata positiivsed) täisarvud m ja n, et

   a) $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{m-n}$?

   b) $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n-m}$?

4. Kolmnurga ABC küljel AC valitakse suvaline tippudest A ja C erinev punkt D. Olgu O_1 ja O_2 vastavalt kolmnurkade ABD ja CBD ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et kolmnurgad O_1DO_2 ja ABC on sarnased.

5. Tasandil on antud 2000 sirget. Tõesta, et nende hulgas leidub kaks sellist, millel on ühepalju erinevaid lõikepunkte ülejäänud sirgetega.

Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 30. märtsil 2000. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Hundilaane metsavanema valimistel on kolm kandidaati: Karu, Siil ja Jänes, ning igaüks 20 metsaelanikust kirjutas valimissedelile kõigi kolme kandidaadi nimed oma eelistuse järjekorras. Hääletussedelite läbivaatamisel selgus, et 11 metsaelanikku eelistab Karu Siilile, 12 Jänest Karule ning 14 Siili Jänesele. Kes kandidaatidest on kõige suuremal arvul hääletussedelitel märgitud esimesena, kui on teada, et iga võimalik kandidaatide järjestus esineb vähemalt ühel sedelil?

2. Kumb arvudest 2^{2002} ja 2000^{200} on suurem?

3. Tõesta, et kui arvud a, b, c, d rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2cd \\ b^2 + c^2 = 2da \\ c^2 + d^2 = 2ab \end{cases},$$

siis $a = b = c = d$.

4. Rööpküliku $ABCD$ külje AD keskpunkt on E ja punktist B sirgele CE tõmmatud ristlõigu aluspunkt on F. Tõesta, et kolmnurk ABF on võrdhaarne.

5. Tasandil antud 2000 sirgest värvitakse punaseks kõik need, millel on paaritu arv erinevaid lõikepunkte ülejäänud sirgetega.
   a) Kas punaseid sirgeid võib olla paaritu arv, kui tasandil antud sirgete hulgas ei ole paralleelseid?
   b) Kas punaseid sirgeid võib olla paaritu arv, kui ükski antud sirgete kolmik ei lõiku ühes punktis?

Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 30. märtsil 2000. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik algarvud, mille kuues aste ei anna 504-ga jagades jäägiks 1.

2. Olgu $PQRS$ kõõlnelinurk, milles $\angle PSR = 90^\circ$, ning olgu punktist Q sirgetele PR ja PS tõmmatud ristlõikude aluspunktid vastavalt H ja K. Tõesta, et sirge HK läbib lõigu SQ keskpunkti.

3. Leia kõik a väärtused, mille korral võrrandil $x^3 - x + a = 0$ on kolm erinevat täisarvulist lahendit.

4. Defineerime jadad $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ja $b_1, b_2, b_3, \ldots$ järgmiste seostega: $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ ning $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ ja $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Leia arvu $a_{2000} + b_{2000}$ kõik erinevad algtegurid.

5. Matemaatikutel M ja N on kummalgi oma lemmikkäsiraamat-teoreemikogu, mida ta oma töös tihti kasutab. Kord otsustasid nad omavahel mängida mängu, milles kumbki matemaatik igal oma käigul tõestab suvalise sellise teoreemi oma käsiraamatust, mida mängu jooksul kumbki veel tõestanud pole. Käike tehakse kordamööda, alustab matemaatik M. Võidab see, kelle käsiraamatu teoreemid saavad esimesena kõik tõestatud; kui mõlema käsiraamatu teoreemid saavad tõestatud korraga, võidab viimase teoreemi tõestanud matemaatik.

   Olgu matemaatiku M käsiraamatus m teoreemi. Leia kõik m väärtused, mille korral matemaatikul M leidub võitev strateegia, kui on teada, et matemaatiku N käsiraamatus on 222 teoreemi ja neist 101 esineb ka matemaatiku M käsiraamatus.

Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 30. märtsil 2000. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu $x \neq 1$ fikseeritud positiivne arv ja a_1, a_2, a_3, ... mingi arvujada. Tõesta, et x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, ... on mittekonstantne geomeetriline jada siis ja ainult siis, kui a_1, a_2, a_3, ... on mittekonstantne aritmeetiline jada.

2. Lõpmatu kolmnurkse arvutabeli esimene rida sisaldab ühe arvu, teine rida kaks arvu, kolmas rida kolm arvu jne. Seejuures on mistahes k-ndas reas ($k = 1, 2, 3, \ldots$) esimesel ja viimasel kohal arv k, iga muu arv tabelis leitakse aga kui eelmises reas selle kohal paikneva kahe arvu vähim ühiskordne (kõrvaloleval joonisel on näidatud selle tabeli viis esimest rida). Valime tabelist mistahes kaks niisugust arvu, mis ei paikne oma reas esimesel ega viimasel kohal. Tõesta, et üks valitud arvudest jagub teisega.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 2 & & & \\ & & 3 & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 6 & & 6 & & 4 & \\ 5 & & 12 & & 6 & & 12 & & 5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

3. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, milles $\angle ACB = 60^\circ$, ning lõikugu selle kõrgused AD ja BE punktis H. Tõesta, et kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt paikneb sirgel, mis poolitab nurgad AHE ja BHD.

4. Tõesta, et suvalise kolmnurga korral kehtib võrdus

$$a \cdot \cos(\beta + \gamma) + b \cdot \cos(\gamma + \alpha) + c \cdot \cos(\alpha - \beta) = 0 ,$$

kus a, b, c on kolmnurga küljepikkused ja α, β, γ vastavalt nende külgede vastasnurkade suurused.

5. Tasandile joonestatakse n sirget, mis jaotavad selle teatud arvuks lõplikeks ja lõpmatuteks osadeks. Millise vähima sirgete arvu n korral võib tekkivate tasandiosade hulgas olla lõplikke rohkem kui lõpmatuid?