XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 11 марта 1999 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что если p нечетное простое число, то число $p^2(p^2 - 1999)$ делится на 6, но не делится на 12.

2. Известно, что у квадратных уравнений $x^2 + 6x + 4a = 0$ и $x^2 + 2bx - 12 = 0$ найдется общий корень. Доказать, что тогда и у квадратных уравнений $x^2 + 9x + 9a = 0$ и $x^2 + 3bx - 27 = 0$ найдется общий корень.

3. Пусть E и F соответственно середины сторон AB и DA квадрата $ABCD$, а G точка пересечения отрезков DE и CF. Найти отношения $|EG| : |GC| : |CE|$ длин сторон треугольника EGC.

4. Строим из натуральных чисел ромбы:

$$1\,, \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array}\,, \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array}\,, \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}\,, \qquad \ldots$$

   Найти сумму чисел, стоящих в n-ном ромбе.

5. В стене есть отверстие размером 23×19 см. Пройдет ли через это отверстие черепица размером $5 \times 24 \times 30$ см?

XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 11 марта 1999 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все пары целых чисел (a, b), при которых $a^2 + b = b^{1999}$.

2. Найти все значения параметра a, при котором модуль одного из решений уравнения

$$x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

в два раза больше модуля второго решения.

3. Окружность с центром в точке I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, AC и BC в точках K, L и M соответственно. На сторонах AC и BC берутся соответственно точки P и Q такие, что $|AP| = |CL|$ и $|BQ| = |CM|$. Доказать, что разность площадей фигур $APIQB$ и $CPIQ$ равна площади четырехугольника $CLIM$.

4. Даны 32 камня различного веса и рычажные весы без гирь. Как определить за 35 взвешиваний, какой камень самый тяжелый, а какой второй по тяжести?

5. На отрезке AB берется произвольная внутренняя точка C и строятся равносторонние треугольники ADC и CEB, лежащие по одну сторону от отрезка AB. Найти геометрическое место точек, которые могут быть серединой отрезка DE.

XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 11 марта 1999 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все пары целых чисел (m, n), при которых

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}\,.$$

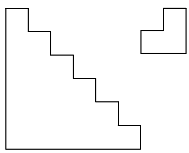
2. Найти значение выражения

$$f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2}{2000}\right)+\ldots+f\left(\frac{1999}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{1999}\right)+\ldots+f\left(\frac{2000}{1}\right)$$

если $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

3. Дан треугольник ABC. Доказать, что точка X, расположенная на прямой AB, удовлетворяет условию $\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ тогда и только тогда, когда X основание высоты или медианы треугольника ABC (запись $\vec{v}\cdot\vec{u}$ обозначает скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$).

4. При каких значениях n можно покрыть боковую сторону лестницы с n ступеньками (на рисунке $n=6$) плитками данной формы? Высота и ширина ступеньки 1дм, плитка имеет размеры 2×2 дм и из ее угла вырезан кусок размером 1×1 дм.



5. На клетках a1, a2, ..., a8 шахматной доски лежат соответственно $2^0, 2^1, \ldots, 2^7$ овсяных зерен, на клетках b8, b7, ..., b1 соответственно $2^8, 2^9, \ldots, 2^{15}$ зерен, на клетках c1, c2, ..., c8 соответственно $2^{16}, 2^{17}, \ldots, 2^{23}$ зерен и т.д. (таким образом на клетке h1 лежит 2^{63} зерен). Шахматный конь начинает двигаться с некоторой клетки и после каждого прыжка съедает все зерна с клетки, на которую он прыгнул, но сразу после того как конь прыгнет дальше, там снова появляется столько же зерен. Последним прыжком конь вернется на клетку, с которой начинал. Доказать, что общее число съеденных конем зерен делится на 3.

XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 11 марта 1999 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть a, b, c и d неотрицательные целые числа. Доказать, что числа 2^a7^b и 2^c7^d дают одинаковый остаток при делении на 15 тогда и только тогда, когда числа 3^a5^b и 3^c5^d дают одинаковый остаток при делении на 16.

2. Найти значение интеграла
$$\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx\,.$$

3. Доказать, что отрезок, соединяющий точки пересечения высот и медиан остроугольного треугольника ABC, параллелен стороне AB тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg}\angle A\cdot\operatorname{tg}\angle B=3$.

   Замечание: отрезок длиной 0 считаем параллельным любой прямой.

4. На некоторые клетки шахматной доски размера $2n\times 2n$ клеток положим фишки так, что в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду находится нечетное число фишек. Доказать, что всего на черных клетках шахматной доски четное число фишек.

5. На окружности пишут в некотором порядке числа $0, 1, 2, \ldots, 9$. Доказать, что

   а) на окружности найдутся три последовательных числа, сумма которых не меньше 15;

   б) не обязательно найдутся три последовательных числа, сумма которых больше 15.