Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 11. märtsil 1999. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. Liites antud arvule arvu $1998p^2$, saame $p^2(p^2-1)$ ehk $(p-1)\cdot p\cdot(p+1)\cdot p$. Kuna kolmest järjestikusest täisarvust üks jagub alati 3-ga, siis jagub ka nende korrutis 3-ga. Kuna arv p on paaritu, siis $p-1$ ja $p+1$ on paarisarvud ning nende korrutis jagub 4-ga (tegelikult isegi 8-ga). Seega arv $p^2(p^2-1)$ jagub 12-ga. Kuna $p^2(p^2-1)$ ja $1998p^2$ jaguvad mõlemad 6-ga, siis jagub 6-ga ka ülesandes antud arv. Kui see arv jaguks 12-ga, siis peaks 12-ga jaguma ka arv $1998p^2$, mis on võimatu, sest p^2 on paaritu ja 1998 ei jagu 4-ga.

2. Olgu x_0 esimese kahe ruutvõrrandi ühine lahend. Siis $\frac{3}{2}x_0$ on viimase kahe ruutvõrrandi ühine lahend. Tõepoolest, võttes kolmanda võrrandi vasakus pooles $x=\frac{3}{2}x_0$, saame

$$\left(\frac{3}{2}x_0\right)^2+9\cdot\frac{3}{2}x_0+9a=\frac{9}{4}(x_0^2+6x_0+4a)=0\ ,$$

sest x_0 on esimese võrrandi lahend. Analoogiliselt kontrollime, et $\frac{3}{2}x_0$ on ka neljanda võrrandi lahend.

3. *Vastus:* $3:4:5$.

Lahendus 1. Tõmbame lisaks lõigud BH ja AI, kus H ja I on vastavalt ruudu külgede CD ja BC keskpunktid. Olgu K ja L vastavalt lõikude DE ja AI ning lõikude CF ja BH lõikepunktid (vt. joonist 1). Täisnurksete kolmnurkade DGF ja DAE sarnasusest ning kolmnurkade DGF ja AKE võrdsusest saame $|DG|=2|GF|=2|KE|$, lõikude GF ja KA paralleelsusest ja sellest, et F on külje AD keskpunkt, aga

$|DG| = |GK|$. Kokkuvõttes seega $|DG| = |GK| = 2|KE|$. Et pöördel 90° võrra ümber ruudu keskpunkti kujutuvad punktid D, G, K, E vastavalt punktideks C, L, G, F, siis ka $|CL| = |LG| = 2|GF|$ ning $|LG| = |GK|$. Valides lõigu KE pikkuse ühikuks, saame niisiis $|GE| = 3$, $|CG| = 4$ ja $|CE| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Lahendus 2. Valime ühikuks ruudu küljepikkuse, siis

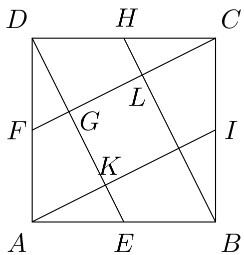
$$|DE| = |CE| = \sqrt{|CB|^2 + |EB|^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

Nurk $\angle CGE$ on täisnurk, sest sirge CF saame, pöörates sirget DE 90° võrra ümber ruudu $ABCD$ keskpunkti. Järelikult on lõik CG kolmnurga DCE kõrgus ning selle kolmnurga pindala on

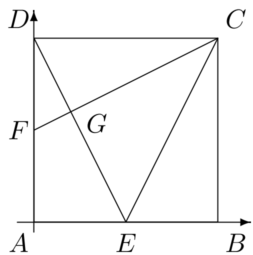
$$S = \frac{1}{2}|DC| \cdot |BC| = \frac{1}{2}|DE| \cdot |GC| .$$

Siit $|GC| = \dfrac{|DC| \cdot |BC|}{|DE|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ning $|EG| = \sqrt{|EC|^2 - |GC|^2} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$. Kolmnurga EGC küljepikkuste suhted on niisiis

$$|EG| : |GC| : |CE| = \frac{3}{2\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5}}{2} = 3 : 4 : 5 .$$



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus 3. Paigutame tasandile koordinaatteljestiku nii, et ruudu tippude koordinaadid oleksid $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$ (vt. joonist 2). Sirge DE võrrand on siis $y = 1 - 2x$ ning sirge CF võrrand $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$. Nende sirgete lõikepunkt on G, mille x-koordinaat rahuldab võrrandit $1-2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$, ehk $x=\frac{1}{5}$ ja $y=\frac{3}{5}$. Vaadeldava kolmnurga tipud on seega $E\left(\frac{1}{2};0\right)$, $G\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$ ja $C(1;1)$. Lõikude EG, GC ja CE pikkused leiame nüüd Pythagorase teoreemi abil: $|EG|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{3}{5}-0)^2}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$, $|GC|=\frac{2}{\sqrt{5}}$ ning $|CE|=\frac{\sqrt{5}}{2}$, s.t. kolmnurga EGC küljepikkuste suhted on

$$|EG|:|GC|:|CE|=\frac{3}{2\sqrt{5}}:\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{\sqrt{5}}{2}=3:4:5\,.$$

4. *Vastus:* n^3.

Lahendus 1. Olgu S_n n-nda rombi arvude summa. Siis

$$\begin{aligned}S_n &= 1\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+n\cdot n+\\ &\quad +(n-1)\cdot(n+1)+\ldots+(n-(n-1))\cdot(n+(n-1))=\\ &= 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n^2-1^2)+\ldots+(n^2-(n-1)^2)=\\ &= (1^2+\ldots+n^2)-(1^2+\ldots+(n-1)^2)+(n-1)\cdot n^2=\\ &= n^2+(n-1)\cdot n^2=n^3\,.\end{aligned}$$

Lahendus 2. Vaatleme rombi koosnevana n diagonaalreast: esimene rida sisaldab arve $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, teine rida arve $2,\ 3,\ \ldots,\ n+1,\ \ldots$, viimane rida arve $n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-1$. Summeerides arvud ridade kaupa, saame

$$\begin{aligned}S_n &= (1+\ldots+n)+(2+\ldots+(n+1))+\ldots+(n+\ldots+(2n-1))=\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+3)}{2}+\ldots+\frac{n(3n-1)}{2}=\\ &= \frac{n}{2}\cdot((n+1)+(n+3)+\ldots+(3n-1))=\\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{4n\cdot n}{2}=n^3\,.\end{aligned}$$

Lahendus 3. Tõestame matemaatilise induktsiooniga, et $S_n=n^3$. Kui $n=1$, siis koosneb romb vaid ühest arvust 1 ja $S_n=1=1^3$. Oletame, et võrdus $S_n=n^3$ kehtib juhul $n=k$, ja näitame, et ta kehtib ka juhul

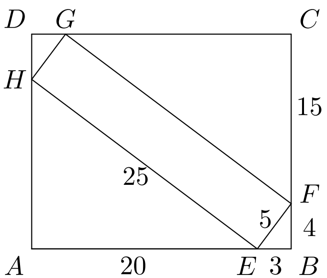
$n = k+1$. Tõepoolest, $(k+1)$-se rombi saame, kui pikendame k-nda rombi viimast $k-1$ horisontaalrida algusest ja lõpust ühe arvu võrra, lisame rombi alla rea kahe arvuga $2k$ ja nende alla ühe arvu $2k+1$. Seega

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 2\cdot((k+1)+\ldots+2k) + 2k+1 = \\ &= k^3 + 2\cdot\frac{k(3k+1)}{2} + 2k+1 = \\ &= k^3+3k^2+3k+1 = (k+1)^3\,. \end{aligned}$$

Lahendus 4. Paneme tähele, et n-ndas rombis on $2n-1$ horisontaalset arvurida ning selle rombi arvude summa ei muutu, kui asendada esimese ja viimase, teise ja eelviimase, ..., $(n-1)$-se ja $(n+1)$-se rea arvud vastavate aritmeetiliste keskmistega. Kuid k-nda ja $(2n-k)$-nda rea arvude aritmeetiline keskmine on $\dfrac{k+(2n-k)}{2} = n$ ning vaadeldava rombi arvude summa on seega

$$\begin{aligned} S_n &= n\cdot(1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+1) = \\ &= n\cdot(n+n\cdot(n-1)) = n\cdot n^2 = n^3\,. \end{aligned}$$

5. *Vastus:* mahub küll.



Joonis 3

Märgime augu $ABCD$ külgedel AB, BC, CD ja DA vastavalt punktid E, F, G ja H nii, et $|AE| = |CG| = 20$ cm ja $|BF| = |DH| = 4$ cm (vt. joonist 3). Siis $|BE| = |DG| = 3$ cm ja $|AH| = |CF| = 15$ cm. Et $\dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$, siis on kõik neli nurkmist kolmnurka sarnased. Sellest järeldub, et

$$\angle AEH + \angle BEF = \angle BFE + \angle CFG = \angle CGF + \angle DGH = \\ = \angle DHG + \angle AHE = 90^\circ$$

ja nelinurk $EFGH$ on seega ristkülik. Selle ristküliku küljepikkused on

$$|EF| = |GH| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

ja

$$|FG| = |HE| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm} .$$

Kui pöörata katusekivi nii, et kõige väiksem tahk mõõtmetega 5×24 cm on ees, siis mahub ta ristkülikust $EFGH$ ning seega ka august $ABCD$ läbi.

X klass

1. *Vastus:* $(0;-1)$, $(0;0)$ ja $(0;1)$.

   Kirjutame vaadeldava võrduse kujul $a^2 = b(b^{1998} - 1)$. Kui $b \leqslant -2$, siis saaksime $a^2 < 0$, mis pole võimalik. Kui $b \geqslant 2$, siis arvud b ja $b^{1998} - 1$ on mõlemad positiivsed ning ühistegurita (sest nende mistahes ühine tegur oleks siis ka arvu 1 jagaja). See aga tähendab, et arvud b ja $b^{1998} - 1$ peavad mõlemad olema täisruudud, sest kui ühes neist esineks mõni algtegur paaritul astmel, siis peaks sama algtegur esinema ka teises arvus. Et ka b^{1998} on täisruut, siis saame vastuolu, sest ainsad kaks järjestikust täisarvu, mis mõlemad on täisruudud, on 0 ja 1. Järele jäävad võimalused $b = -1$, $b = 0$ ja $b = 1$, mis kõik sobivad ja annavad $a = 0$.

2. *Vastus:* $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$ ja $\frac{5}{3}$.

   Ruutvõrrandi lahendivalemist saame

$$x = \frac{-(a-2) \pm \sqrt{(a-2)^2 - 4 \cdot (-2a^2 + 5a - 3)}}{2} = \\ = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4 + 8a^2 - 20a + 12}}{2} = \\ = \frac{2 - a \pm \sqrt{9a^2 - 24a + 16}}{2} = \frac{2 - a \pm \sqrt{(3a-4)^2}}{2}$$

ehk

$$x_1 = \frac{2 - a - (3a - 4)}{2} = -2a + 3\,, \qquad x_2 = \frac{2 - a + (3a - 4)}{2} = a - 1\,.$$

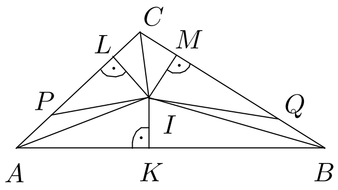
Selleks, et üks lahend oleks absoluutväärtuselt kaks korda suurem kui teine, on kaks erinevat võimalust.

Olgu kõigepealt $|x_1| = 2|x_2|$ ehk $|-2a+3| = 2 \cdot |a-1|$. Avaldis $a-1$ on mittenegatiivne $a \geqslant 1$ korral ja negatiivne $a < 1$ korral, avaldis $-2a+3$ aga on mittenegatiivne $a \leqslant \frac{3}{2}$ korral ja negatiivne $a > \frac{3}{2}$ korral. Kokkuvõttes saame, et $a < 1$ korral on võrrandil kuju $-2a + 3 = 2(1 - a)$, mis annab vastuolulise võrduse $3 = 2$, ning $a > \frac{3}{2}$ korral on võrrandil kuju $2a - 3 = 2(a - 1)$, mis annab vastuolulise võrduse $-3 = -2$. Kui $1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$, on võrrandil kuju $-2a+3 = 2(a-1)$, millest $4a = 5$ ja $a = \frac{5}{4}$.

Olgu nüüd $|x_2| = 2|x_1|$ ehk $|a-1| = 2 \cdot |-2a+3|$. See võrrand omandab $a < 1$ korral kuju $1 - a = 2(-2a + 3)$, millest $3a = 5$ ja $a = \frac{5}{3}$, kuid see lahend ei sobi, sest ta asub vaadeldavast piirkonnast $a < 1$ väljaspool. Kui $1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$, saab võrrand kuju $a - 1 = 2(-2a + 3)$, millest $5a = 7$ ja $a = \frac{7}{5}$, ning $a > \frac{3}{2}$ korral kuju $a - 1 = 2(2a - 3)$, millest $3a = 5$ ja $a = \frac{5}{3}$.

Kokkuvõttes on niisiis parameetri a võimalikeks väärtusteks $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$ ja $\frac{5}{3}$.

3. Tõestame kõigepealt võrduse $S_{APIK} - S_{CPI} = S_{CLI}$. Ühelt poolt $S_{CPI} = S_{ALI}$, sest mõlema kolmnurga kõrguseks on kolmnurga ABC siseringjoone raadius ning eeldusest $|AP| = |CL|$ tuleneb nende aluste võrdsus $|AL| = |CP|$ (vt. joonist 4). Peale selle $S_{ALI} = S_{AKI}$, sest need kolmnurgad on kongruentsed kolme võrdse külje järgi. Seega $S_{CPI} = S_{AKI}$. Teiselt poolt $S_{CLI} = S_{API}$, sest nende kolmnurkade kõrgused ja alused on võrdsed. Liites võrdused $S_{CPI} = S_{AKI}$ ja $S_{CLI} = S_{API}$, saame $S_{CPI} + S_{CLI} = S_{APIK}$, millest järeldub vajalik võrdus.

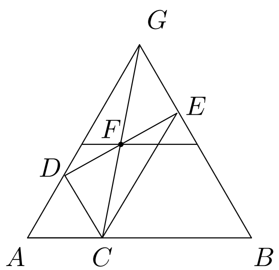


Joonis 4

Täiesti analoogilise aruteluga näitame, et $S_{BQIK} - S_{CQI} = S_{CMI}$. Liites sellele eespool tõestatud võrduse $S_{APIK} - S_{CPI} = S_{CLI}$, saamegi $S_{APIQB} - S_{CQIQ} = S_{CLIM}$, mida oli tarvis tõestada.

4. Teeme kõigepealt 31 kaalumisega kindlaks raskeima kivi ning leiame ühtlasi 5 kivi, millest üks peab kindlasti olema raskuselt teine. Selleks jaotame kivid 16 paari ja võrdleme iga paari kive omavahel; seejärel jaotame paarides raskemaks osutunud kivid omakorda 8 paari ja võrdleme iga paari kive, jne. Nii teeme kokku $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ kaalumist, viimasel kaalumisel leiame raskeima kivi ning raskuselt teine kivi võib olla vaid üks neist viiest, mis kaalumisel raskeimale kivile alla jäid.

   Nüüd on lihtne ülejäänud 4 kaalumisega ka raskuselt teine kivi üles leida: selleks võime kõigepealt võrrelda suvalist kaht kivi leitud viiest ning igal järgmisel kaalumisel võrrelda eelmisel kaalumisel raskemaks osutunud kivi ühega veel kaalumata kividest.



Joonis 5

5. *Vastus:* lõigule AB konstrueeritud võrdkülgse kolmnurga küljega AB paralleelne kesklõik (selle otspunktid välja arvatud).

Olgu F lõigu DE keskpunkt. Pikendame lõike AD ja BE kuni lõikumiseni punktis G (vt. joonist 5). Punkt G on punkti P asukohast sõltumatu ning nelinurk $ECDG$ on rööpkülik ja punkt F tema diagonaali DE keskpunkt. Kuna rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteise, siis on F ka lõigu CG keskpunkt. Kui punkt C läbib lõigu AB, siis läbib punkt F lõikude AG ja BG keskpunkte ühendava lõigu. Otsitav punktihulk on seega kolmnurga ABG küljega AB paralleelne kesklõik, millest vastavalt ülesande tingimustele jäävad välja mõlemad otspunktid.

XI klass

1. *Vastus:* paarid $(k, -k)$ ja $\left(\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}\right)$, kus k on suvaline täisarv, välja arvatud paarid $(1, 0)$ ja $(0, 1)$.

   Korrutades võrduse pooli parema poole nimetajaga, saame

   $$(m-n)^2(m+n-1) = 4mn$$

   ehk

   $$4mn = (m-n)^2(m+n) - (m-n)^2 \ .$$

   Arvestades, et $4mn + (m-n)^2 = (m+n)^2$, saame võrduse viia kujule $(m+n)^2 = (m-n)^2(m+n)$, kust $m+n = 0$ või $m+n = (m-n)^2$. Esimesel juhul saame $n = -m$, s.t. sobivad paarid $(k, -k)$, kus k on suvaline täisarv. Teisel juhul tähistame $m - n = k$, siis $m + n = k^2$ ning $m = \dfrac{k^2+k}{2}$ ja $n = \dfrac{k^2-k}{2}$. Et ülesandes antud murru nimetaja ei võrduks nulliga, tuleb siin lisada tingimus, et $m + n \neq 1$, ehk $k \neq 1$ ja $k \neq -1$.

2. *Vastus:* $1999\,\dfrac{1}{2}$.

   Paneme tähele, et mistahes reaalarvu $x \neq 0$ korral

   $$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} =$$

   $$= \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 1 \ .$$

Seega on ülesandes antud avaldise väärtus

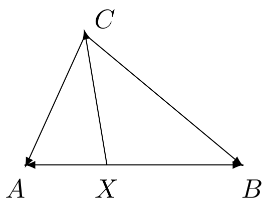
$$\left(f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{1}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\frac{1999}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{1999}\right)\right)+f\left(\frac{2000}{2000}\right)=$$

$$=1999\cdot 1+f(1)=1999\,\frac{1}{2}\,.$$

3. Kuna $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XC}$ ja $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XC}$ (vt. joonist 6), siis on ülesandes toodud võrdus samaväärne võrdusega

$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{XC}=(\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XC})\cdot(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XC})\,.$$

Sulge avades ja sarnaseid liikmeid koondades saame siit esialgse seosega samaväärse võrduse $0=-\overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}$, ehk $\overrightarrow{XC}\cdot(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})=0$.



Joonis 6

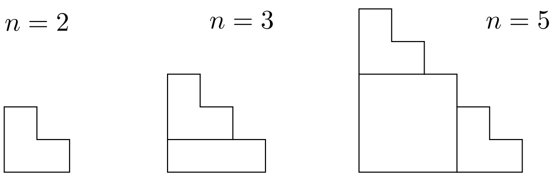
Oletame nüüd, et kolmnurgas ABC kehtib seos $\overrightarrow{XC}\cdot(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})=0$. Kui $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=0$, siis poolitab punkt X külje AB ning on järelikult kolmnurga ABC mediaani aluspunkt. Kui aga $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\neq 0$, siis peab vektor $\overrightarrow{XC}$ olema risti vektoriga $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}$ ning seega ka küljega AB. Punkt X on siis kolmnurga ABC kõrguse aluspunkt.

Vastupidi, kui X on mediaani aluspunkt, siis $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=0$ ja võrdus $\overrightarrow{XC}\cdot(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})=0$ kehtib. Kui X on kõrguse aluspunkt, siis on vektor $\overrightarrow{XC}$ risti küljega AB ja seega ka vektoriga $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}$ ning nõutav seos kehtib samuti.

4. *Vastus:* $n=3k$ või $n=3k+2$, välja arvatud $n=3$ ja $n=5$.

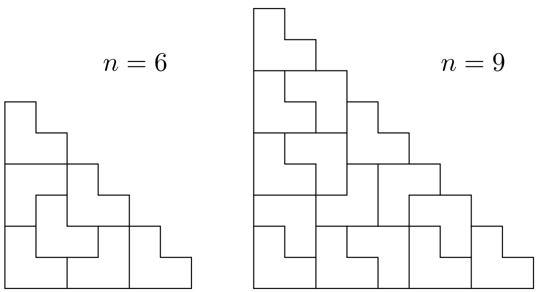
Trepi külgseina pindala on $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ dm^2, iga plaadi pindala aga on $3\ \mathrm{dm}^2$. Seega peab üks arvudest n ja $n+1$ jaguma 3-ga, s.t. trepi külgseina ei saa näidatud kujuga plaatidega katta, kui $n=3k+1$.

Vaatleme kõigepealt juhte $n=2$, $n=3$, $n=5$. Juhul $n=2$ on ilmselt katmine võimalik. Kui $n=3$, siis peab üks plaat asuma seina tipus ning sellest jääb järele kolmeruuduline riba, mida ei saa nõutud kujuga plaadiga katta (vt. joonist 7). Kui $n=5$, siis peavad kaks nurgakest asuma seina tippudes ning järele jääb ruut mõõtmetega 3×3, mida pole võimalik katta kolme plaadiga, sest siis peaks üks neist sisaldama kahte ruudu tippu.



Joonis 7

Juhtudel $n=6$ ja $n=9$ saab seina katta joonisel 8 näidatud viisil.

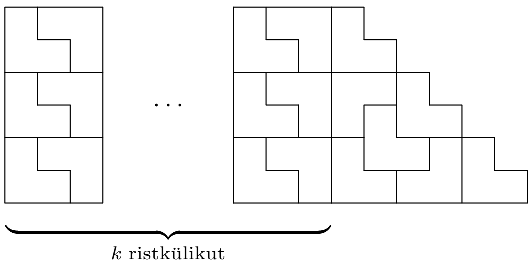


Joonis 8

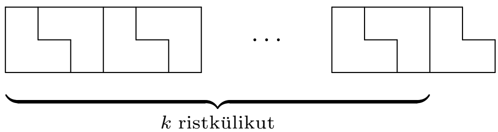
Näitame nüüd, et seina saab katta iga arvu $n=3k$ korral, v.a. $n=3$. Selleks anname konstruktsiooni, kuidas katmisest juhul $n=3k$ saab konstrueerida katmise juhul $n=3k+6$. Selleks jätame algul seina alumise osa

6 dm kõrguselt katmata ning katame ülejäänud osa juhu $n = 3k$ jaoks leitud viisil. Ülejäänud riba katame nii, nagu näidatud joonisel 9.

Näitame nüüd, et seina saab katta ka iga arvu $n = 3k + 2$ korral, v. a. $n = 5$. Juhul $n = 2$ on meil konstruktsioon olemas — seega piisab näidata, et kui seina saab katta $n = 3k$ korral, siis saab seda katta ka $n = 3k + 2$ korral. Selleks jätame algul seina alumise osa 2 dm kõrguselt katmata ning katame ülejäänud osa juhu $n = 3k$ jaoks leitud viisil. Ülejäänud riba katame nii, nagu näidatud joonisel 10.



Joonis 9



Joonis 10

5. Paneme tähele, et malelaua valgetel ruutudel olevate kaeraterade arvud esituvad kujul 2^{2n}, mustadel ruutudel olevate kaeraterade arvud aga kujul 2^{2n+1}, kus $n = 0, 1, 2, \ldots, 31$. Kuna mistahes mittenegatiivse täisarvu n korral annab arv 2^{2n} kolmega jagamisel jäägi 1, arv 2^{2n+1} aga jäägi 2 ning maleratsu hüppab alati üht värvi ruudult teist värvi ruudule, siis sööb ratsu mistahes kahe järjestikuse hüppe järel kokku kolmega jaguva arvu kaerateri. Et lõpuks jõuab ratsu tagasi ruudule, millelt ta liikumist alustas, peab hüppeid olema paarisarv ning ka söödud terade koguarv jagub seega kolmega.

XII klass

1. Alljärgnevalt kasutame tähistust $x \equiv y \pmod{n}$ tähenduses "arvud x ja y annavad n-ga jagamisel sama jäägi".

   Näitame kõigepealt, et kui $|a'-a| = |b'-b| = 2$, siis $2^a 7^b \equiv 2^{a'} 7^{b'} \pmod{15}$ ja $3^a 5^b \equiv 3^{a'} 5^{b'} \pmod{16}$. Tõepoolest: üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a' = a + 2$. Kui $b' = b + 2$, saame

$$2^{a'} 7^{b'} = 2^a 7^b \cdot 2^2 7^2 = 2^a 7^b \cdot (2 \cdot 7)^2 \equiv 2^a 7^b \cdot (-1)^2 = 2^a 7^b \pmod{15}$$

   ning

$$3^{a'} 5^{b'} = 3^a 5^b \cdot 3^2 5^2 = 3^a 5^b \cdot (3 \cdot 5)^2 \equiv 3^a 5^b \cdot (-1)^2 = 3^a 5^b \pmod{16} .$$

   Kui aga $b' = b - 2$, võime kasutada samu seoseid koos tähelepanekuga, et $7^4 \equiv 1 \pmod{15}$ ja $5^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

   Veendume nüüd, et iga mittenegatiivsete täisarvude paari (a, b) korral leidub paar (a', b'), nii et $2^a 7^b \equiv 2^{a'} 7^{b'} \pmod{15}$ ja $3^a 5^b \equiv 3^{a'} 5^{b'} \pmod{16}$ ning a' sisaldub hulgas $\{0, 1, 2, 3\}$ ja b' hulgas $\{0, 1\}$. Eespool tõestatust järeldub, et kumbagi astendajat eraldi võime muuta 4-ga jaguva arvu võrra, ilma et jagamisel nõutud arvuga tekkiv jääk muutuks (selleks rakendame eelmise lõigu väidet sobivalt kaks korda). Niisiis võime piirduda juhuga, kus a ja b kuuluvad hulka $\{0, 1, 2, 3\}$. Kui $b \leqslant 1$, võtame $a' = a$ ja $b' = b$; kui aga $b > 1$, siis $b' = b - 2$ ning a' valime kui arvu hulgast $\{0, 1, 2, 3\}$, mis erineb arvust a täpselt 2 võrra.

Arv	Jääk jagamisel 15-ga
$2^0 7^0$	1
$2^1 7^0$	2
$2^2 7^0$	4
$2^3 7^0$	8
$2^0 7^1$	7
$2^1 7^1$	14
$2^2 7^1$	13
$2^3 7^1$	11

Arv	Jääk jagamisel 16-ga
$3^0 5^0$	1
$3^1 5^0$	3
$3^2 5^0$	9
$3^3 5^0$	11
$3^0 5^1$	5
$3^1 5^1$	15
$3^2 5^1$	13
$3^3 5^1$	7

Jääb üle veenduda, et arvude $2^{a'}7^{b'}$ jagamisel 15-ga tekkivad jäägid ning samuti arvude $3^{a'}5^{b'}$ jagamisel 16-ga tekkivad jäägid on paarikaupa erinevad, kui a' ja b' võetakse ülalmainitud arvuhulkadest — see on näha eespool toodud tabelitest.

2. *Vastus:* 0.

Olgu $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Kuna alati $1+x^2 > x^2$, siis $\sqrt{1+x^2} > |x|$, mistõttu $f(x)$ on määratud iga reaalarvu x korral. Näitame, et funktsioon $f(x)$ on paaritu, s.t. $f(-x) = -f(x)$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\bigl(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\bigr) = \ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = \\ &= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)\ . \end{aligned}$$

Olgu nüüd

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \quad I_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx, \quad I_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx\ .$$

Tehes integraalis I_1 muutuja vahetuse $x = -t$, saame

$$I_1 = -\int_{1}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{1} f(-t)\,dt = -\int_{0}^{1} f(t)\,dt = -I_2\ .$$

Järelikult

$$I = I_1 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0\ .$$

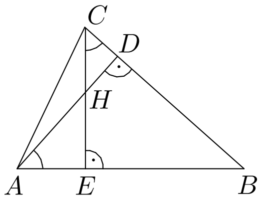
Märkus. Võrdust

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(mis kehtib mistahes reaalarvu a ja paaritu funktsiooni $f(x)$ korral) võime põhjendada ka määratud integraali geomeetrilisest tähendusest lähtudes.

Sellise funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, mistõttu sellega, x-teljega ning sirgetega $x = -a$ ja $x = a$ piiratud kujund jaguneb kaheks võrdpindseks osaks, millest üks paikneb all- ja teine ülalpool x-telge. Et vaadeldava integraali väärtus on võrdne nimetatud kujundi ülal- ja allpool x-telge paiknevate osade pindalade vahega, siis ongi see väärtus 0.

3. Olgu tippudest A ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D ja E ning kõrguste lõikepunkt H (vt. joonist 11). Paneme kõigepealt tähele, et punkt H asub küljega AB paralleelsel ja kolmnurga mediaanide lõikepunkti läbival sirgel siis ja ainult siis, kui $\dfrac{|CE|}{|EH|} = 3$, ning seega piisab näidata, et $\dfrac{|CE|}{|EH|} = \tan\angle A \cdot \tan\angle B$. Et $\angle AHE = \angle CHD$, siis ka $\angle EAH = \angle BCE$, s.t. täisnurksed kolmnurgad CEB ja AEH on sarnased ning $\tan\angle B = \dfrac{|CE|}{|EB|} = \dfrac{|AE|}{|EH|}$. Arvestades, et $\tan\angle A = \dfrac{|CE|}{|AE|}$, saamegi nõutava võrduse.



Joonis 11

4. Nummerdame malelaua horisontaal- ja vertikaalread arvudega 1 kuni $2n$; üldisust kitsendamata võime eeldada, et ruut $(1,1)$ on must. Olgu A nuppude arv ruutudel, mis paiknevad paarisnumbriga horisontaal- ja vertikaalreas, B nuppude arv ruutudel, mis paiknevad paaritu numbriga horisontaal- ja vertikaalreas ning C nuppude arv ruutudel, mis paiknevad paarisnumbriga horisontaalreas ja paaritu numbriga vertikaalreas. Siis $A + C$ on nuppude koguarv paarisnumbriga horisontaalridades ja $B + C$ on nuppude koguarv paaritu numbriga vertikaalridades — et selliseid ridu ja veerge on ühepalju, siis on need arvud sama paarsusega ning nuppude koguarv mustadel ruutudel $A+B = (A+C)+(B+C)-2C$ on järelikult paarisarv.

5. a) Ringjoonele kirjutatavate arvude summa on 45 ning vaadeldava küm-

ne arvukolmiku summade liitmisel saame järelikult $3 \cdot 45 = 135$. Paneme tähele, et mistahes kahes naaberkolmikus on kaks arvu ühised ja kolmas erinev ning seega ei saa nende summad olla võrdsed. Niisiis juhul, kui üheski kolmikus ei oleks arvude summa suurem kui 14, peaksid need summad olema vaheldumisi 13 ja 14. Sel juhul oleks aga mistahes kuue järjestikuse arvu summa 27, mis pole võimalik, sest ka kahe naaberkuuiku arvude summad ei saa olla võrdsed.

b) Kirjutame arvud ringjoonele näiteks järjekorras 3, 8, 1, 5, 9, 0, 6, 7, 2, 4 — on lihtne kontrollida, et mistahes kolme järjestikuse arvu summa on siis ülimalt 15.