Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 11. märtsil 1999. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et kui p on paaritu algarv, siis arv $p^2(p^2-1999)$ jagub 6-ga, kuid mitte 12-ga.

2. On teada, et ruutvõrranditel $x^2+6x+4a=0$ ja $x^2+2bx-12=0$ leidub ühine lahend. Tõesta, et siis leidub ühine lahend ka ruutvõrranditel $x^2+9x+9a=0$ ja $x^2+3bx-27=0$.

3. Olgu E ja F vastavalt ruudu $ABCD$ külgede AB ja DA keskpunktid ning G lõikude DE ja CF lõikepunkt. Leia kolmnurga EGC küljepikkuste suhted $|EG|:|GC|:|CE|$.

4. Konstrueerime naturaalarvudest rombid

$$1\,, \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array}\,, \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array}\,, \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}\,, \qquad \ldots$$

   Leia n-ndas rombis asuvate arvude summa.

5. Seinas on auk mõõtmetega 23×19 cm. Kas sellest august mahub läbi katusekivi mõõtmetega $5 \times 24 \times 30$ cm?

Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 11. märtsil 1999. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral $a^2 + b = b^{1999}$.

2. Leia parameetri a kõik väärtused, mille korral võrrandi

   $$x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

   ühe lahendi absoluutväärtus on kaks korda suurem teise lahendi absoluutväärtusest.

3. Kolmnurga ABC siseringjoon keskpunktiga I puutub külgi AB, AC ja BC vastavalt punktides K, L ja M. Külgedel AC ja BC valitakse vastavalt punktid P ja Q, nii et $|AP| = |CL|$ ja $|BQ| = |CM|$. Tõesta, et kujundite $APIQB$ ja $CPIQ$ pindalade vahe on võrdne nelinurga $CLIM$ pindalaga.

4. On antud 32 erineva kaaluga kivi ja vihtideta kangkaalud. Kuidas määrata 35 kaalumise abil, milline kivi on raskeim ja milline raskuselt teine?

5. Lõigul AB valitakse suvaline sisepunkt C ning konstrueeritakse lõigust AB samale poole võrdkülgsed kolmnurgad ADC ja CEB. Leia kõigi nende punktide hulk, mis võivad olla lõigu DE keskpunktiks.

Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 11. märtsil 1999. a.

XI klass

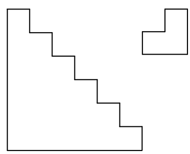
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Leia kõik täisarvude paarid (m, n), mille korral
$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1} \ .$$

2. Leia avaldise
$$f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2}{2000}\right)+\ldots+f\left(\frac{1999}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{1999}\right)+\ldots+f\left(\frac{2000}{1}\right)$$
väärtus, kui $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

3. On antud kolmnurk ABC. Tõesta, et sirgel AB asuv punkt X rahuldab tingimust $\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ siis ja ainult siis, kui X on kolmnurga ABC kõrguse või mediaani aluspunkt (kirjutis $\vec{v}\cdot\vec{u}$ tähistab vektorite $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ skalaarkorrutist).

4. Milliste n väärtuste korral saab n-astmelise trepi küljseina (joonisel $n=6$) katta näidatud kujuga plaatidega? Trepi iga astme laius ja kõrgus on 1 dm, plaadi mõõtmed on 2×2 dm ja selle nurgast on välja lõigatud tükk mõõtmetega 1×1 dm.



5. Malelaua ruutudel a1, a2, ..., a8 on vastavalt $2^0, 2^1, \ldots, 2^7$ kaeratera, ruutudel b8, b7, ..., b1 vastavalt $2^8, 2^9, \ldots, 2^{15}$ kaeratera, ruutudel c1, c2, ..., c8 vastavalt $2^{16}, 2^{17}, \ldots, 2^{23}$ kaeratera jne. (nii et ruudul h1 on 2^{63} kaeratera). Maleratsu alustab mingilt ruudult liikumist ja sööb pärast iga hüpet ära kõik kaeraterad ruudult, millele ta hüppas, kuid kohe pärast ratsu edasiliikumist ilmub sinna sama arv teri tagasi. Viimase hüppega jõuab ratsu tagasi sellele ruudule, millelt ta liikumist alustas. Tõesta, et kokku sööb ratsu ära 3-ga jaguva arvu kaerateri.

Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 11. märtsil 1999. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Olgu a, b, c ja d mittenegatiivsed täisarvud. Tõesta, et arvud $2^a 7^b$ ja $2^c 7^d$ annavad 15-ga jagamisel sama jäägi siis ja ainult siis, kui arvud $3^a 5^b$ ja $3^c 5^d$ annavad 16-ga jagamisel sama jäägi.

2. Leia integraali

$$\int_{-1}^{1} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$$

väärtus.

3. Tõesta, et teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti ja mediaanide lõikepunkti ühendav lõik on paralleelne kolmnurga küljega AB siis ja ainult siis, kui $\tan \angle A \cdot \tan \angle B = 3$.

   Märkus: lõigu pikkusega 0 loeme paralleelseks mistahes sirgega.

4. Asetame $2n \times 2n$ ruudust koosneva malelaua mõnedele ruutudele nupud, nii et igas horisontaal- ja igas vertikaalreas on paaritu arv nuppe. Tõesta, et malelaua mustadel ruutudel on kokku paarisarv nuppe.

5. Ringjoonele kirjutatakse mingis järjekorras arvud $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tõesta, et

   a) ringjoonel leiduvad kolm järjestikust arvu, mille summa on vähemalt 15;

   b) ei tarvitse leiduda kolme järjestikust arvu, mille summa on suurem kui 15.