XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 12 марта 1998 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти две последние цифры числа 11^{1998}.

2. Пусть S — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и пусть прямая AS пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D ($D \neq A$). Доказать, что отрезки BD, CD и SD имеют равную длину.

3. На замкнутой трассе по часовой стрелке расположены пять боксов A, B, C, D и E, причем длина участка трассы между боксами A и B равна 1км, между B и C — 5км, между C и D — 2км, между D и E — 10км, а между E и A — 3км. На трассе едут по часовой стрелке, заезд всегда начинается и заканчивается в боксе. С какого бокса начали заезд, если длина заезда была ровно 1998км?

4. Про действительные числа x, y и z известно, что $x+y=2$ и $xy=z^2+1$. Найти значение выражения $x^2+y^2+z^2$.

5. За круглым столом сидят 13 детей, у каждого из которых в руках по две карты. На каждой карте написано одно из чисел 1, 2, …, 13 и каждое число написано ровно на двух картах. По сигналу каждый ребенок отдает карту с меньшим числом своему соседу справа (и одновременно получает от соседа слева его карту с меньшим числом). Доказать, что после конечного числа таких обменов возникнет ситуация, когда по крайней мере у одного из детей будут две карты с одним и тем же числом.

XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 12 марта 1998 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что для любых действительных чисел $a > b > c$ выполняется неравенство

   $$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)>0\,.$$

2. Пусть C и D — две различные точки на полуокружности с диаметром AB. Пусть E — точка пересечения прямых AC и BD, F — точка пересечения прямых AD и BC, а X, Y и Z — соответственно середины отрезков AB, CD и EF. Доказать, что точки X, Y и Z расположены на одной прямой.

3. В гостинице 13 комнат с номерами от 1 до 13, расположенные по одной стороне прямого коридора в порядке возрастания номеров. Во время туристического сезона, который длится с 1-го мая до 1-го октября, посетитель гостиницы имеет возможность снять либо одну комнату на два дня подряд, либо две соседние комнаты вместе на один день. Сколько максимально смог заработать владелец гостиницы за сезон, если известно, что 1-го октября комнаты 1 и 13 были пустыми, а плата за одну комнату составляла один тугрик в день?

4. Доказать, что если при положительном целом n число 5^n+3^n+1 является простым, то n делится на 12.

5. На бумаге отмечено конечное число синих и красных точек, причем некоторые из этих точек соединены между собой линиями. Назовем точку P *особой*, если более половины точек, соединенных с точкой P, имеют отличный от P цвет. Коля выбирает одну особую точку и изменяет ее цвет на противоположный. Затем Коля выбирает новую особую точку и изменяет ее цвет, и т.д. Доказать, что после конечного числа перекрашиваний Коля достигнет ситуации, когда на бумаге нет ни одной особой точки.

XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 12 марта 1998 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть d_1 и d_2 — положительные делители целого положительного числа n, причем наибольший общий делитель чисел $\frac{n}{d_1}$ и d_2 равен наибольшему общему делителю чисел $\frac{n}{d_2}$ и d_1. Доказать, что $d_1 = d_2$.

2. Пусть A_1, B_1 и C_1 — соответственно середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, а A_2, B_2 и C_2 — соответственно середины отрезков B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1. Пусть центры окружностей, вписанных в треугольники B_1AC_1, C_1BA_1 и A_1CB_1, соответственно A_3, B_3 и C_3. Доказать, что прямые A_2A_3, B_2B_3 и C_2C_3 пересекаются в одной точке.

3. Функция f при любом действительном числе x удовлетворяет условиям $f(x) \neq 0$ и $f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$. Доказать, что $f(x+18) = f(x)$ при любом действительном x.

4. Число, обратное к действительному числу a, равно разности числа a и его целой части $[a]$. Доказать, что число a не является рациональным.

   Примечание: целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее числа x: например, $[2{,}7] = 2$, $[-2{,}7] = -3$.

5. Коля разделил окружность на n равных дуг, отметив на ней n точек. Затем он заметил, что как бы он не раскрашивал двумя цветами все отмеченные точки, в плоскости окружности всегда найдется прямая, относительно которой каждая отмеченная точка отражается в отмеченную точку того же цвета. Найти все возможные значения числа n.

XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 12 марта 1998 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение $x^2 + 1 = \log_2(x + 2) - 2x$.

2. Найти все простые числа вида $10101\ldots01$.

3. Пусть BC — самая длинная сторона треугольника ABC и биссектриса, проведенная из вершины A, пересекает сторону BC в точке D. Пусть точки E и F являются основаниями перпендикуляров, проведенных из точки D на стороны AB и AC соответственно. Обозначим отношение площадей треугольников DEB и DFC через R.
   а) Доказать, что для любого положительного действительного числа r можно построить такой треугольник ABC, при котором отношение R равно заданному числу r.
   б) Доказать, что если отношение R иррационально, то по крайней мере одна из длин сторон треугольника ABC является иррациональным.
   в) Привести примеры треугольников, у которых длины ровно одной, ровно двух или всех трех сторон являются иррациональными, а отношение R — рациональное число.

4. Найти все целые числа $n > 2$, для которых выполняется равенство

$$(2n)! = (n-2)! \cdot n! \cdot (n+2)!\,.$$

Примечание: Запись $m!$ обозначает факториал числа m, т.е. $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$.

5. Квадрат размером $n \times n$ делят на n^2 единичных квадратиков и отделяют один угловой квадратик. Найти все значения числа n, для которых возможно разбить оставшуюся фигуру на части указанного на рисунке вида (каждая часть состоит из трех единичных квадратиков).