Eesti koolinoorte XLV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 12. märtsil 1998. a.

Lahendused ja vastused

9. klass

1. *Vastus*: 81.

   Lahendus 1: Paneme tähele, et kui täisarv x lõpeb numbritega n ja 1, kus $0 \leqslant n \leqslant 8$, siis arv $11 \cdot x$ lõpeb numbritega $n+1$ ja 1; kui aga arv x lõpeb numbritega 91, siis arv $11 \cdot x$ lõpeb numbritega 01. Tõepoolest, mõlemad esitatud väited järelduvad otseselt võrdusest

   $$11 \cdot (100s + 10n + 1) = 100 \cdot (11s + n) + 10 \cdot (n + 1) + 1 .$$

   Eeltoodust järeldub, et arvude 11^1, 11^2, 11^3, …, 11^9, 11^{10}, 11^{11}, … kaks viimast numbrit on vastavalt 11, 21, 31, …, 91, 01, 11, …, s.t. mistahes positiivse täisarvu k korral on arvu 11^k viimane number 1 ja eelviimane number langeb kokku arvu k viimase numbriga. Niisiis lõpeb arv 11^{1998} numbritega 81.

   Lahendus 2: Rakendame binoomvalemit

   $$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \ldots + nxy^{n-1} + y^n ,$$

   võttes $x = 10$, $y = 1$ ja $n = 1998$. Niiviisi saame võrduse

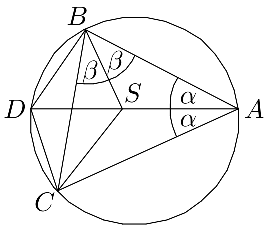
   $$11^{1998} = (10 + 1)^{1998} = 10^{1998} + 1998 \cdot 10^{1997} + \ldots + 1998 \cdot 10 + 1 ,$$

   millest on ilmne, et arvu 11^{1998} viimane number on 1 ja eelviimane 8.

2. Võrduse $|BD| = |SD|$ tõestamiseks piisab näidata, et kolmnurk BDS on võrdhaarne alusega BS, s.t. $\angle DBS = \angle DSB$.

   Olgu $\angle BAS = \alpha$ ja $\angle ABS = \beta$ (vt. joonist 1), siis kolmnurgast ABS saame $\angle ASB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ja $\angle DSB = \alpha + \beta$. Teiselt poolt kehtivad vastavalt ülesande tingimustele võrdused $\angle DAC = \angle DAB = \alpha$ ja $\angle CBS = \angle ABS = \beta$ ning kõõlnelinurgast $ABDC$ saame, et

$\angle DBC = \angle DAC$ — seega $\angle DBS = \angle DBC + \angle CBS = \alpha + \beta$. Analoogiliselt saame tõestada võrduse $|CD| = |SD|$.



Joonis 1

3. *Vastus*: boksist E.

   Kuna ringraja kogupikkus on $1 + 5 + 2 + 10 + 3 = 21$km ning $1998 = 95 \cdot 21 + 3$, siis täpselt 1998km läbimiseks tuleb sõita rajal 95 ringi ja veel 3km. Ainus võimalus täpselt 3km pikkuse rajalõigu läbimiseks on alustada boksist E ja lõpetada boksis A.

4. *Vastus*: 2.

   Lahendus 1: Et $xy = z^2 + 1 > 0$, siis on arvud x ja y samamärgilised; võrratuse $x + y = 2 > 0$ tõttu peab olema $x, y > 0$. Rakendades nüüd positiivsete arvude x ja y aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$. Kuna teiselt poolt $xy = z^2 + 1 \geqslant 1$, siis $xy = 1$ ja $z = 0$ ning $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 2 = 2$.

   Lahendus 2: Avaldades võrdusest $x + y = 2$ muutuja y ja asendades teise võrdusesse saame $x(2 - x) = z^2 + 1$, mis teisendamisel annab ruutvõrrandi $x^2 - 2x + (z^2 + 1) = 0$. Kuna muutujad x ja y esinevad ülesande tingimustes sümmeetriliselt, saame samasuguse ruutvõrrandi ka y suhtes. Seega

   $$x, y = 1 \pm \sqrt{1 - (z^2 + 1)} = 1 \pm \sqrt{-z^2}\,.$$

   Siit saame ainsa võimalusena $z = 0$, mis annab $x = y = 1$. Seega $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$.

5. Võime eeldada, et kahe ühesuguse numbriga kaardi jõudmisel ühe mängija kätte mäng lõpeb. Siis ei anta arvuga 13 kaarte kordagi edasi,

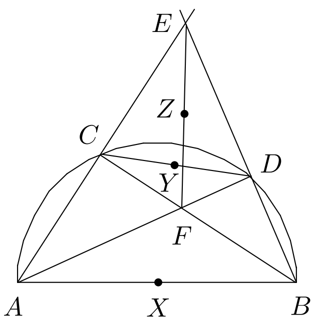
arvuga 12 kaarte võidakse aga edasi anda ainult kahel esimesel korral. Pärast nende kaartide paigalejäämist antakse arvuga 11 kaarte edasi veel ülimalt neljal järgmisel korral, seejärel arvuga 10 kaarte veel ülimalt kuuel korral jne. Seda arutlust jätkates näeme, et kui $2+4+6+8+10=30$ vahetuse jooksul ei ole ühegi mängija kätte veel kaht sama arvuga kaarti sattunud, siis kõik 12 kaarti arvudega 13, 12, 11, 10, 9 ja 8 on selleks ajaks erinevate mängijate käes ning neid edaspidi enam kordagi edasi ei anta. Kaardid arvuga 7 võivad siis edasi liikuda veel ülimalt 12 järgmisel korral ning jõuavad lõpuks ühe ja sama (kolmeteistkümnenda) mängija kätte.

10. klass

1. Teisendades saame:

$$\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)= \\
&\qquad =a^2(b-c)+b^2(c-b)+b^2(b-a)+c^2(a-b)= \\
&\qquad =(a^2-b^2)(b-c)-(b^2-c^2)(a-b)= \\
&\qquad =(a+b)(a-b)(b-c)-(b+c)(b-c)(a-b)= \\
&\qquad =(a-b)(b-c)(a+b-b-c)= \\
&\qquad =(a-b)(b-c)(a-c)>0\ ,
\end{aligned}$$

kuna tegurid $a-b$, $b-c$ ja $a-c$ on eelduse $a>b>c$ kohaselt kõik positiivsed.

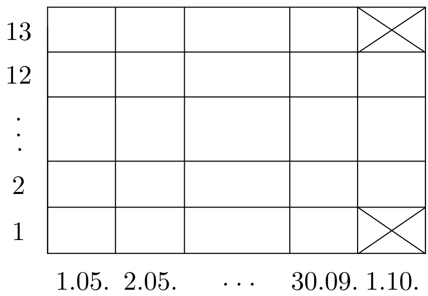


Joonis 2

2. Kuna punkt X on poolringjoone diameetri AB keskpunkt ja Y sama poolringjoone kõõlu CD keskpunkt, siis on lõik XY risti lõiguga CD (vt. joonist 2). Poolringjoone diameetrile toetuvad nurgad $\angle ACB$ ja $\angle ADB$ on täisnurgad, mistõttu kolmnurgad ECF ja EDF on täisnurksed. Seega on $ECFD$ kõõlnelinurk ja EF selle ümberringjoone diameeter. Kuna punkt Z on nelinurga $ECFD$ ümberringjoone keskpunkt ja Y sama ringjoone kõõlu CD keskpunkt, siis on lõik ZY risti lõiguga CD. Niisiis on lõigud XY ja ZY risti ühe ja sama lõiguga CD ning punktid X, Y ja Z paiknevad järelikult ühel sirgel.

   Märkus: Kui vahetada punktide C ja D asukohad poolringjoonel (nii et punkt C paikneb punktide D ja B vahel), siis vahetuvad ka punktide E ja F asukohad, lõik EF jääb aga samaks ning esitatud lahenduses ei muutu seeläbi midagi.

3. *Vastus*: 1998 tugrikut.



Joonis 3

Koostame tubade väljaüürimise tabeli, mille read vastavad hotelli tubadele ja veerud turismihooaja päevadele (vt. joonist 3). Ühe toa väljaüürimisel kaheks päevaks märgitakse selles tabelis kaks horisontaalselt teineteise kõrval paiknevat ruutu, kahe naabertoa väljaüürimisel üheks päevaks aga kaks vertikaalselt teineteise kõrval paiknevat ruutu. Värvides tabeli ruudud malelaua taoliselt kahe värviga näeme, et mõlemal juhul märgitakse kaks erinevat värvi ruutu. Et 1. maist kuni 1. oktoobrini on 154 päeva (s.t. paarisarv), siis on tabelis kumbagi värvi ruute ühepalju, parempoolsed nurgaruudud aga (mis vastavad tubadele 1 ja 13 väljaüürimisele 1. oktoobril) on ühte ja sama värvi. Niisiis peab tabeli ruutude ülalkirjeldatud viisil kahekaupa märkimisel lisaks neile ruutudele veel vähemalt kaks ruutu tühjaks jääma ning hotelli omaniku kogutulu hooaja vältel ei saa seega ületada $13 \cdot 154 - 4 = 1998$ tugrikut.

Jääb üle veenduda, et tubade üürimise eest 1998 tugriku kogumine on tõepoolest võimalik — näiteks juhul, kui toad 1 ja 13 olid tühjad ka 30. septembril, muidu olid aga kogu hooaja vältel kõik toad pidevalt kahe päeva kaupa välja üüritud.

4. *Lahendus 1:* Tõestame, et kui arv n ei jagu 12-ga, siis $5^n + 3^n + 1$ on kordarv. Selleks paneme tähele, et mistahes 12-ga mittejaguvat arvu n saab esitada vähemalt ühel järgmistest neljast kujust: $n = 2k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 6k + 2$ või $n = 6k + 4$.

   Kui $n = 2k + 1$, siis $5^n + 3^n + 1 = 5^{2k+1} + 3^{2k+1} + 1$. Võrduse paremal pool olev arv jagub 3-ga, sest $5^{2k+1} + 1$ jagub arvuga $5 + 1 = 6$ (astmenäitaja $2k + 1$ on paaritu).

   Kui $n = 4k+2$, siis $5^n+3^n+1 = 5^{4k+2}+3^{4k+2}+1 = 5^{4k+2}+9^{2k+1}+1$. Võrduse paremal pool olev arv jagub 5-ga, sest $9^{2k+1}+1$ jagub arvuga $9 + 1 = 10$.

   Kui $n = 6k + 2$, siis arv

$$\begin{aligned}15 \cdot (5^n + 3^n + 1) &= 15 \cdot (5^{6k+2} + 3^{6k+2} + 1) = \\ &= 3 \cdot (5^{6k+3} + 1) + 5 \cdot (3^{6k+3} + 1) + 7 = \\ &= 3 \cdot (125^{2k+1} + 1) + 5 \cdot (27^{2k+1} + 1) + 7\,.\end{aligned}$$

   jagub 7-ga, sest $125^{2k+1}+1$ jagub arvuga $125+1 = 7\cdot 18$ ja $27^{2k+1}+1$ jagub arvuga $27 + 1 = 7 \cdot 4$. Kuna 15 ei jagu algarvuga 7, siis peab 7-ga jaguma arv $5^n + 3^n + 1$.

   Kui $n = 6k + 4$, siis arv

$$\begin{aligned}5^n + 3^n + 1 &= 5^{6k+4} + 3^{6k+4} + 1 = \\ &= 5 \cdot (5^{6k+3} + 1) + 3 \cdot (3^{6k+3} + 1) - 7 = \\ &= 5 \cdot (125^{2k+1} + 1) + 3 \cdot (27^{2k+1} + 1) - 7\,.\end{aligned}$$

   jagub 7-ga, sest $125^{2k+1}+1$ jagub arvuga $125+1 = 7\cdot 18$ ja $27^{2k+1}+1$ jagub arvuga $27 + 1 = 7 \cdot 4$.

   Lahendus 2: Paneme tähele, et $5^2 \equiv 1 \pmod 3$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ ja

$3^6 \equiv 5^6 \equiv 1 \pmod 7$ (siin ja edaspidi kirjutis $x \equiv y \pmod n$ tähendab, et arvud x ja y annavad arvuga n jagamisel ühe ja sama jäägi).
Kui $n = 2k+1$, siis

$$\begin{aligned} 5^n + 3^n + 1 &= 5^{2k+1} + 3^{2k+1} + 1 = 5 \cdot (5^2)^k + 3^{2k+1} + 1 \equiv \\ &\equiv 5 + 0 + 1 \equiv 0 \pmod 3 , \end{aligned}$$

s.t. arv $5^n + 3^n + 1$ jagub 3-ga.
Kui $n = 4k+2$, siis

$$\begin{aligned} 5^n + 3^n + 1 &= 5^{4k+2} + 3^{4k+2} + 1 = 5^{4k+2} + 9 \cdot (3^4)^k + 1 \equiv \\ &\equiv 0 + 9 + 1 \equiv 0 \pmod 5 , \end{aligned}$$

s.t. arv $5^n + 3^n + 1$ jagub 5-ga.
Kui $n = 6k+2$, siis

$$\begin{aligned} 5^n + 3^n + 1 &= 5^{6k+2} + 3^{6k+2} + 1 = 25 \cdot (5^6)^k + 9 \cdot (3^6)^k + 1 \equiv \\ &\equiv 25 + 9 + 1 \equiv 0 \pmod 7 , \end{aligned}$$

s.t. arv $5^n + 3^n + 1$ jagub 7-ga.
Kui $n = 6k+4$, siis

$$\begin{aligned} 5^n + 3^n + 1 &= 5^{6k+4} + 3^{6k+4} + 1 = 625 \cdot (5^6)^k + 81 \cdot (3^6)^k + 1 \equiv \\ &\equiv 625 + 81 + 1 \equiv 0 \pmod 7 , \end{aligned}$$

s.t. arv $5^n + 3^n + 1$ jagub 7-ga.
Märkus: Lahenduse algul kirjapandud seosed järelduvad ka *Fermat' väikesest teoreemist*: kui täisarv a ei jagu algarvuga p, siis $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Võib kontrollida, et näiteks $5^{12} + 3^{12} + 1 = 244672067$, $5^{36} + 3^{36} + 1$ ja $5^{48} + 3^{48} + 1$ on tõesti algarvud, $5^{24} + 3^{24} + 1$ ja $5^{60} + 3^{60} + 1$ aga mitte.

5. Olgu N joonte arv, mis ühendavad erinevat värvi punkte. Tõestame, et iga erilise punkti ümbervärvimisega see arv väheneb. Tõepoolest, kui Juku valib mingi erilise punkti, mis on ühendatud m sama värvi punktiga ja k teist värvi punktiga (kusjuures vastavalt erilise punkti definitsioonile $m < k$), siis pärast ümbervärvimist on see punkt

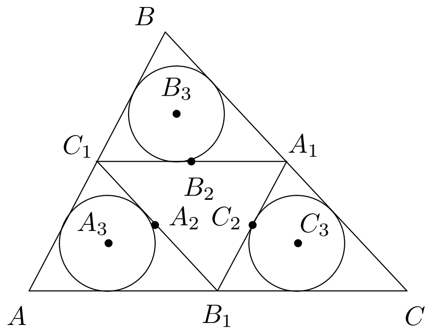
ühendatud k sama värvi punktiga ja m teist värvi punktiga — seega väheneb arv N valitud erilise punkti ümbervärvimisel positiivse suuruse $k-m$ võrra (valitud punktist mittelähtuvate joonte panus arvu N selle punkti ümbervärvimisel ei muutu).
Kuna alati $N \geqslant 0$, siis jõuab Juku mingi arvu eriliste punktide ümbervärvimise järel olukorrani, kus arvu N väärtust ei ole enam võimalik kahandada. See aga tähendabki, et paberile pole järele jäänud enam ühtegi erilist punkti.

11. klass

1. Kuna mistahes positiivsete täisarvude a, b ja k korral kehtib võrdus $\text{SÜT}(ka, kb) = k \cdot \text{SÜT}(a, b)$, siis

$$d_1 \cdot \text{SÜT}\left(\frac{n}{d_1}, d_2\right) = \text{SÜT}(n, d_1 d_2) = d_2 \cdot \text{SÜT}\left(\frac{n}{d_2}, d_1\right).$$

Et aga eelduse põhjal $\text{SÜT}\left(\frac{n}{d_1}, d_2\right) = \text{SÜT}\left(\frac{n}{d_2}, d_1\right)$, siis saame ülaltoodud võrdusest $d_1 = d_2$.



Joonis 4

2. *Lahendus 1:* Kolmnurgad AC_1B_1, C_1BA_1, B_1A_1C ja $A_1B_1C_1$ (vt. joonist 4) on kõik kongruentsed, sest nende külgede pikkused on võrdsed poolega kolmnurga ABC vastavate külgede pikkustest. Seetõttu teiseneb kolmnurk AC_1B_1 pöördel 180° võrra ümber punkti A_2 kolmnurgaks $A_1B_1C_1$ ning selle siseringjoone keskpunkt A_3 teiseneb kolmnurga $A_1B_1C_1$ siseringjoone keskpunktiks. Siit järeldub, et

sirge A_2A_3 läbib kolmnurga $A_1B_1C_1$ siseringjoone keskpunkti. Analoogiliselt arutledes näeme, et ka sirged B_2B_3 ja C_2C_3 läbivad kolmnurga $A_1B_1C_1$ siseringjoone keskpunkti, mis ongi seega nende kolme sirge ühine lõikepunkt.

Lahendus 2: Kolmnurkade $A_2B_2C_2$ ja ABC vastavad küljed on paralleelsed, sest nad on paralleelsed kolmnurga $A_1B_1C_1$ vastavate küljedega. Samuti on paralleelsed kolmnurkade $A_3B_3C_3$ ja ABC vastavad küljed, sest kolmnurkade AC_1B_1, C_1BA_1 ja B_1A_1C siseringjoonte raadiused on võrdsed. Niisiis on mittevõrdsete kolmnurkade $A_2B_2C_2$ ja $A_3B_3C_3$ (esimene neist paikneb alati teise sees) vastavad küljed paralleelsed, s.t. need kolmnurgad on teineteisest saadavad homoteetia ja nihke abil. Homoteetia ja nihke kompositsioon on aga homoteetia ning seega on kolmnurgad $A_2B_2C_2$ ja $A_3B_3C_3$ homoteetsed. Vastav homoteetiakeskpunkt ongi sirgete A_2A_3, B_2B_3 ja C_2C_3 ühiseks lõikepunktiks.

3. Olgu y mistahes reaalarv. Rakendades ülesande teist tingimust $x = y - 2$ ja $x = y + 1$ korral, saame vastavalt võrdused

$$f(y) = f(y-3)f(y+3)$$

ja

$$f(y+3) = f(y)f(y+6)\ .$$

Kuna esimese tingimuse kohaselt $f(y) \neq 0$, siis

$$f(y+6) = \frac{f(y+3)}{f(y)} = \frac{1}{f(y-3)}\ .$$

Tehes selles võrduses asenduse $z = y - 3$, saame $f(z+9) = \dfrac{1}{f(z)}$. Analoogiliselt leiame, et $f(z+18) = \dfrac{1}{f(z+9)}$, s.t. $f(z+18) = f(z)$. Et reaalarv y oli valitud suvaliselt, siis kehtib viimane võrdus mistahes reaalarvu z korral.

4. *Lahendus 1:* Paneme kõigepealt tähele, et a ei saa olla täisarv, sest vahe $a - [a]$ on siis võrdne nulliga, pöördarv aga nullist erinev. Oletame nüüd vastuväiteliselt, et a on ratsionaalarv ning avaldub seega

kujul $a = \dfrac{u}{v}$, kus u ja v on ühistegurita täisarvud ja $v > 1$. Jagades arvu u jäägiga arvuga v, saame $u = qv + r$, kus $q = [a]$ ja $0 < r < v$. Arvud r ja v on seejuures samuti ühistegurita.

Vahe $a - [a]$ esitub nüüd kujul $\dfrac{r}{v}$. Et $\dfrac{1}{a} = \dfrac{v}{qv + r}$, siis saame võrrandi $\dfrac{v}{qv + r} = \dfrac{r}{v}$, ehk $r^2 = v^2 - qrv = v(v - qr)$. Et arvud r ja v on ühistegurita, siis on seda ka arvud r^2 ja v ning võrdus saab kehtida ainult juhul $v = 1$ — vastuolu.

Lahendus 2: Et mistahes reaalarvu a korral vahe $a - [a]$ väärtus sisaldub poollõigul $[0, 1)$, arvude $a \leqslant 1$ pöördarvud aga sellele poollõigule ei kuulu, siis peab ülesande tingimust rahuldav reaalarv a olema suurem arvust 1.

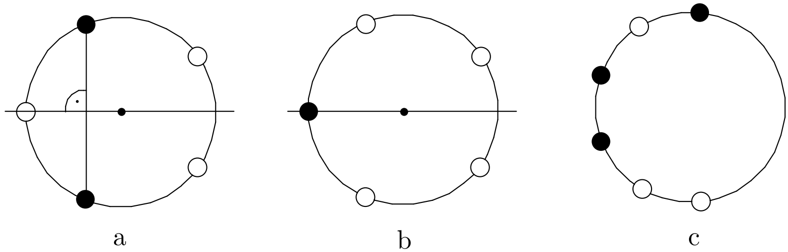
Ülesande tingimuse kohaselt $a - \dfrac{1}{a} = [a]$, millest $a^2 - [a]a - 1 = 0$. Lahendades saadud ruutvõrrandi a suhtes, saame $a = \dfrac{[a] \pm \sqrt{[a]^2 + 4}}{2}$.

Kui a on ratsionaalarv, siis on ka $2a - [a] = \sqrt{[a]^2 + 4}$ ratsionaalarv ning seega leiduvad ühistegurita naturaalarvud u ja v, nii et $\sqrt{[a]^2 + 4} = \dfrac{u}{v}$ ehk $\dfrac{u^2}{v^2} = [a]^2 + 4$. Et selle võrduse parem pool on naturaalarv ja samas arvud u ja v on ühistegurita, peab olema $v = 1$, s.t. $[a]^2 + 4 = u^2$ ehk $(u - [a])(u + [a]) = 4$. Kahest võimalusest $u - [a] = 1$, $u + [a] = 4$ ja $u - [a] = 2$, $u + [a] = 2$ esimene ei anna täisarvulist $[a]$ väärtust, teine aga annab $[a] = 0$, mis on vastuolus algul tõestatud tingimusega $a > 1$.

5. *Vastus:* Arvu n võimalikud väärtused on 1, 2, 3, 4 ja 5.

Kui $n \leqslant 5$, siis leidub kindlasti värv, millega on värvitud ülimalt kaks punkti. Kui selle värviga on värvitud täpselt kaks punkti, siis on nõutava omadusega neid punkte ühendava lõigu keskristsirge (vt. joonist 5a, kus $n = 5$). Kui selle värviga on värvitud üksainus punkt, siis sobib sirge, mis läbib seda punkti ja ringjoone keskpunkti (vt. joonist 5b). Kui kõik punktid on värvitud üheainsa värviga, siis sobib mistahes sirge, mis läbib üht neist punktidest ja ringjoone keskpunkti.

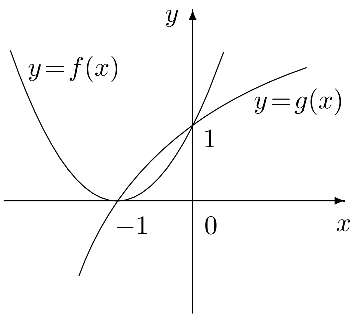
Näitame nüüd, et $n \geqslant 6$ korral saab punktid värvida nii, et nõutava omadusega sirget ei leidu. Selleks värvime ühe värviga kaks naaberpunkti ja lisaks veel nendest ülejärgmise punkti — kõik ülejäänud punktid värvime teise värviga (vt. joonist 5c). Ülesande nõuetele vastav sirge peab ilmselt läbima ühte esimest värvi punkti (vastasel korral peaks seda värvi punkte olema paarisarv) ning olema risti kaht ülejäänud esimest värvi punkti ühendava lõiguga ja läbima selle lõigu keskpunkti (et need punktid peegelduksid selle sirge suhtes teineteiseks). Kolme võimalikku juhtu läbi vaadates saame kergesti veenduda, et niisugust sirget ei leidu.



Joonis 5

12. klass

1. *Vastus*: $x = 0$ ja $x = -1$.



Joonis 6

Teisendame võrrandi kujule $(x+1)^2 = \log_2(x+2)$ ning vaatleme funktsioone $f(x) = (x+1)^2$ ja $g(x) = \log_2(x+2)$. Et funktsiooni $f(x)$ teine tuletis $f''(x) = 2$ on kogu määramispiirkonnas positiivne, funktsiooni $g(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln(x+2)$ teine tuletis $g''(x) = -\frac{1}{\ln 2 \cdot (x+2)^2}$ aga negatiivne, siis on funktsiooni $f(x)$ graafik kogu ulatuses kumer, funktsiooni $g(x)$ graafik aga kogu ulatuses nõgus. Et mõlemad funktsioonid on ka kogu oma määramispiirkonnas pidevad, siis saavad nende graafikud lõikuda ülimalt kahes punktis. Teisalt on aga lihtne veenduda, et $f(0) = g(0) = 1$ ja $f(-1) = g(-1) = 0$ (vt. joonist 6).

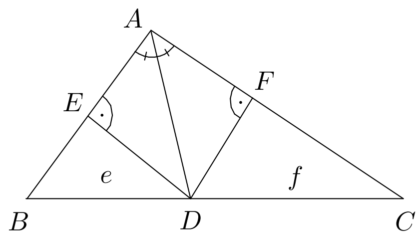
2. *Vastus:* ainus selline algarv on 101.

   Arvu $\underbrace{10101\ldots01}_{k \text{ ühte}}$ saame esitada kujul

$$\begin{aligned} 10101\ldots01 &= 100^0 + 100^1 + \cdots + 100^{k-1} = \\ &= \frac{100^k - 1}{100 - 1} = \frac{(10^k)^2 - 1}{99} = \\ &= \frac{(10^k - 1) \cdot (10^k + 1)}{99} . \end{aligned}$$

   Kui $k \geqslant 3$, siis on viimase murru lugejas mõlemad tegurid suuremad kui 99 ning pärast taandamist jääb järele kahe 1-st suurema arvu korrutis. Juhul $k = 2$ on vaadeldavaks arvuks 101, mis on algarv.

3. a) Olgu α, β ja γ vastavalt kolmnurga tippude A, B ja C juures asuvad nurkade suurused ning a, b ja c nende nurkade vastas asuvate külgede pikkused. Lisaks olgu $|BD| = e$ ja $|CD| = f$ (vt. joonist 7).



Joonis 7

   Kuna $|EB| = e \cos\beta$, siis on kolmnurga DBE pindala $\frac{1}{2} e^2 \sin\beta \cos\beta$.

Analoogiliselt leiame, et kolmnurga DCF pindala on $\frac{1}{2} f^2 \sin\gamma \cos\gamma$ ning nende kolmnurkade pindalade suhe $R = \frac{e^2 \sin\beta \cos\beta}{f^2 \sin\gamma \cos\gamma}$. Et nurgapoolitaja omaduse põhjal $\frac{e}{f} = \frac{c}{b}$, siinusteoreemi põhjal $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$ ja koosinusteoreemi põhjal $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{b \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{c \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}$, siis saame $R = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$. Kui tipu A juures olev nurk on täisnurk, siis $R = \frac{c^2}{b^2}$ ning tingimus $R = r$ omandab kuju $\frac{c}{b} = \sqrt{r}$. Ülesande tingimusi rahuldab seega täisnurkne kolmnurk küljepikkustega $a = \sqrt{1+R}$, $b = 1$ ja $c = \sqrt{R}$.

b) Kui kolmnurga ABC külgede pikkused a, b ja c on ratsionaalarvud, siis on ka suhe $R = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$ ratsionaalarv.

c) Sobivad näiteks kolmnurgad küljepikkustega 1, 1, $\sqrt{3}$; 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ning $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

4. *Vastus:* $n = 3$ ja $n = 5$.

Tõestame kõigepealt, et mistahes täisarvu $m \geqslant 4$ korral kehtib võrratus $(2m+2)\cdot(2m+1) < (m-1)\cdot(m+1)\cdot(m+3)$. Tõepoolest, see on samaväärne võrratusega $m^2 - 2m - 5 > 0$, mis kehtib $m > 1 + \sqrt{6}$ korral.

Kehtigu nüüd mingi $m \geqslant 4$ korral võrratus

$$(2m)! \leqslant (m-2)! \cdot m! \cdot (m+2)!\ .$$

Et samas ka

$$(2m+2) \cdot (2m+1) < (m-1) \cdot (m+1) \cdot (m+3)\ ,$$

saame

$$\begin{aligned}\big(2(m+1)\big)! = (2m+2) \cdot (2m+1) \cdot (2m)! <\\ < (m-1) \cdot (m+1) \cdot (m+3) \cdot (m-2)! \cdot m! \cdot (m+2)! =\\ = (m-1)! \cdot (m+1)! \cdot (m+3)!\ .\end{aligned}$$

Seega ei saa võrdus $(2n)! = (n-2)! \cdot n! \cdot (n+2)!$ kehtida ühegi täisarvu $n > m$ korral.

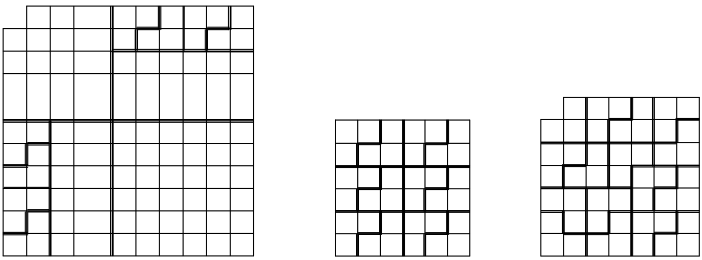
Nüüd on lihtne kontrollida, et

$$\begin{aligned}(2 \cdot 3)! &= (3-2)! \cdot 3! \cdot (3+2)!\ ;\\ (2 \cdot 4)! &> (4-2)! \cdot 4! \cdot (4+2)!\ ;\\ (2 \cdot 5)! &= (5-2)! \cdot 5! \cdot (5+2)!\ .\end{aligned}$$

Ühegi täisarvu $n > 5$ korral võrdus $(2n)! = (n-2)! \cdot n! \cdot (n+2)!$ vastavalt eespool tõestatule ei kehti.

5. *Vastus:* tükeldamine on võimalik parajasti siis, kui arv n ei jagu kolmega.

Kuna iga tükk koosneb kolmest ühikruudust, siis peab tükeldatava kujundi ruutude arv jaguma kolmega. Kui arv n jagub kolmega, siis kujundi ruutude arv $n^2 - 1$ ei jagu kolmega ning tükeldamine pole seega võimalik.

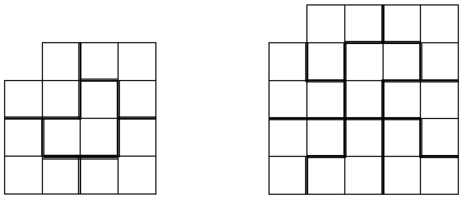


a b c

Joonis 8

Oletame nüüd, et arv n ei jagu kolmega. Eraldame eemaldatud nurgaruudu vastaskülgedest kuue ühikruudu laiused ribad, mis lõikuvad eemaldatud ruudu vastasnurgas, ning hakkame nende ribade otstest lõikama kahe ühikruudu pikkuseid tükke (vt. joonist 8a). Need tükid saame tükeldada joonisel näidatud viisil; sõltuvalt n paarsusest jääb eraldatud ribadest lõpuks järele 6×6 ruut või 7×7 ruut, millest on eemaldatud üks nurgaruut. Selliste kujundite sobivad tükeldused on näidatud joonistel 8b ja 8c.

Eraldades niiviisi kujundist kuue ruudu laiusi ribasid, jõuame lõpuks eemaldatud nurgaga ruuduni, mille küljepikkus võib olla 2, 4 või 5. Küljepikkuse 2 korral on tükeldamine sellega lõpetatud; küljepikkuste 4 ja 5 korral sobivad tükeldused on näidatud joonisel 9.



Joonis 9