Eesti koolinoorte XLV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 12. märtsil 1998. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Leia arvu 11^{1998} kaks viimast numbrit.

2. Olgu S kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning lõigaku sirge AS kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D $(D \neq A)$. Tõesta, et lõigud BD, CD ja SD on võrdse pikkusega.

3. Ringrajal paikneb päripäeva viis boksi A, B, C, D ja E, kusjuures rajalõigu pikkus bokside A ja B vahel on 1 km, B ja C vahel 5 km, C ja D vahel 2 km, D ja E vahel 10 km ning E ja A vahel 3 km. Ringrajal sõidetakse päripäeva, sõit algab ja lõpeb alati boksis. Millisest boksist alustati sõitu, kui sõidu pikkus oli täpselt 1998 km?

4. Reaalarvude x, y ja z kohta on teada, et $x + y = 2$ ja $xy = z^2 + 1$. Leia avaldise $x^2 + y^2 + z^2$ väärtus.

5. Ümmarguse laua taga istub 13 last, kellest igaühel on käes kaks kaarti. Igale kaardile on kirjutatud üks arvudest 1, 2, ..., 13 ning iga arv esineb täpselt kahel kaardil. Märguande peale annab iga laps enda käest väiksema arvuga kaardi oma parempoolsele naabrile (ja saab samaaegselt oma vasakult naabrilt tema väiksema arvuga kaardi asemele). Tõesta, et lõpliku arvu selliste vahetuste järel tekib olukord, kus vähemalt ühel lastest on käes kaks sama arvuga kaarti.

Eesti koolinoorte XLV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 12. märtsil 1998. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et mistahes reaalarvude $a > b > c$ korral kehtib võrratus

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0 .$$

2. Olgu C ja D kaks erinevat punkti poolringjoonel diameetriga AB. Olgu E sirgete AC ja BD lõikepunkt, F sirgete AD ja BC lõikepunkt ning X, Y ja Z vastavalt lõikude AB, CD ja EF keskpunktid. Tõesta, et punktid X, Y ja Z paiknevad ühel sirgel.

3. Hotellis on 13 tuba numbritega 1 kuni 13, mis paiknevad ühel pool sirget koridori numbrite kasvamise järjekorras. Turismihooajal, mis kestab 1. maist kuni 1. oktoobrini, on hotelli külastajal võimalik üürida üks tuba kaheks päevaks järjest või kaks naabertuba koos üheks päevaks. Kui palju võis hotelli omanik hooaja jooksul maksimaalselt teenida, kui on teada, et 1. oktoobril olid toad 1 ja 13 tühjad ning ühe toa üürimine maksis ühe tugriku päevas?

4. Tõesta, et kui positiivse täisarvu n korral on $5^n + 3^n + 1$ algarv, siis n jagub arvuga 12.

5. Paberile on märgitud lõplik arv siniseid ja punaseid punkte ning mõned neist punktidest on omavahel ühendatud joontega. Nimetame punkti P *eriliseks*, kui rohkem kui pooled punktiga P ühendatud punktidest on teist värvi kui punkt P. Juku valib ühe erilise punkti ja muudab selle värvi vastupidiseks. Seejärel valib Juku uue erilise punkti ja muudab selle värvi, jne. Tõesta, et lõpliku arvu ümbervärvimiste järel jõuab Juku olukorrani, kus paberil pole ühtegi erilist punkti.

Eesti koolinoorte XLV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 12. märtsil 1998. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Olgu arvud d_1 ja d_2 positiivse täisarvu n positiivsed jagajad, kusjuures arvude $\frac{n}{d_1}$ ja d_2 suurim ühistegur on võrdne arvude $\frac{n}{d_2}$ ja d_1 suurima ühisteguriga. Tõesta, et $d_1 = d_2$.

2. Olgu A_1, B_1 ja C_1 vastavalt kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid ning A_2, B_2 ja C_2 vastavalt lõikude B_1C_1, C_1A_1 ja A_1B_1 keskpunktid. Kolmnurkade B_1AC_1, C_1BA_1 ja A_1CB_1 siseringjoonte keskpunktid olgu vastavalt A_3, B_3 ja C_3. Tõesta, et sirged A_2A_3, B_2B_3 ja C_2C_3 lõikuvad ühes punktis.

3. Funktsioon f rahuldab iga reaalarvu x korral tingimusi $f(x) \neq 0$ ja $f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$. Tõesta, et $f(x+18) = f(x)$ mistahes reaalarvu x korral.

4. Reaalarvu a pöördarv on võrdne arvu a ja selle täisosa $[a]$ vahega. Tõesta, et a ei ole ratsionaalarv.

   Märkus: arvu x täisosaks $[x]$ nimetatakse suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x: näiteks $[2{,}7] = 2$, $[-2{,}7] = -3$.

5. Juku jaotas ringjoone n võrdseks kaareks, märkides sellel n punkti. Seejärel leidis ta, et ükskõik kuidas ta ka ei värviks kahe värviga kõik märgitud punktid, leidub ringjoone tasandil alati selline sirge, mille suhtes iga märgitud punkt peegeldub sama värvi märgitud punktiks. Leia arvu n kõik võimalikud väärtused.

Eesti koolinoorte XLV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 12. märtsil 1998. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand $x^2 + 1 = \log_2(x + 2) - 2x$.

2. Leia kõik algarvud kujul $10101\ldots01$.

3. Olgu BC kolmnurga ABC pikim külg ning lõigaku tipust A tõmmatud nurgapoolitaja külge BC punktis D. Olgu E ja F punktist D vastavalt külgedele AB ja AC tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Tähistame kolmnurkade DEB ja DFC pindalade suhte tähega R.
   a) Tõesta, et iga positiivse reaalarvu r jaoks saab konstrueerida niisuguse kolmnurga ABC, mille korral suhe R on võrdne etteantud arvuga r.
   b) Tõesta, et kui suhe R on irratsionaalarv, siis vähemalt üks kolmnurga ABC küljepikkustest on irratsionaalarv.
   c) Too näited kolmnurkadest, millel täpselt ühe, täpselt kahe või kõigi kolme külje pikkused on irratsionaalarvud, aga suhe R on ratsionaalarv.

4. Leia kõik täisarvud $n > 2$, mille korral kehtib võrdus
   $$(2n)! = (n-2)! \cdot n! \cdot (n+2)!\,.$$
   Märkus: Kirjutis $m!$ tähistab arvu m faktoriaali, s.t. $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$.

5. Ruut mõõtmetega $n \times n$ jaotatakse n^2 ühikruuduks ning eemaldatakse üks nurgaruut. Leia arvu n kõik väärtused, mille korral saab järelejääva kujundi tükeldada joonisel näidatud kujuga tükkideks (iga tükk koosneb kolmest ühikruudust).