XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 1997 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что для любого целого числа $n \geqslant 3$ найдутся такие положительные целые числа x и y, при которых выполняется равенство $2^n = 7x^2 + y^2$.

2. Найти целые числа $a \neq 0$, b и c такие, чтобы число $x = 2+\sqrt{3}$ являлось решением квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3. Точки A, B, M и N расположены на окружности с центром O так, что радиусы OA и OB перпендикулярны, а хорда MN параллельна отрезку AB и пересекает радиус OA в точке P. Найти радиус окружности, если $|MP| = 12$ и $|PN| = 2\sqrt{14}$.

4. Каждая клетка клетчатого поля размерами $3n \times 3n$ покрашена в черный или красный цвет. У каждой красной клетки, не лежащей на краю поля, ровно пять из восьми соседних клеток окрашены в черный цвет. У каждой черной клетки, не лежащей на краю поля, ровно четыре соседние клетки окрашены в красный цвет. Сколько красных и сколько черных клеток на этом поле?

5. При сотворении мира был создан остров, населенный драконами, змеями и крокодилами. Каждый обитатель острова питается один раз в день: каждый змей съедает на завтрак одного дракона, каждый дракон съедает на обед одного крокодила и каждый крокодил съедает на ужин одного змея. Найти общее число драконов, змеев и крокодилов на острове сразу после сотворения мира (в начале первого дня), если к концу шестого дня на острове остался один единственный крокодил и в течении этих шести дней никто из обитателей острова ни разу не остался без еды.

XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 1997 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти:
   а) все четверки целых положительных чисел (a, k, l, m), для которых выполняется равенство $a^k = a^l + a^m$;
   б) все пятерки целых положительных чисел (a, k, l, m, n), для которых выполняется равенство $a^k = a^l + a^m + a^n$.

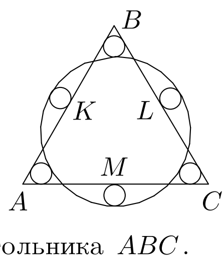
2. Доказать, что при любых вещественных числах x и y выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}.$$

3. В треугольнике ABC величины $\tan\angle A$, $\tan\angle B$ и $\tan\angle C$ относятся как числа 1, 2 и 3. Найти отношение длин сторон треугольника AC и AB.

4. Маша и Юра играют в следующую игру. Изначально на столе лежат две кучки, в которых соответственно m и n конфет. На каждом ходу игрок заберет со стола одну кучу конфет и разделит вторую кучу на две непустые части по своему усмотрению, не разламывая при этом конфет. Ходы совершаются поочередно и проигрывает тот игрок, который не может сделать очередной ход. Кто из игроков победит, если оба используют оптимальную стратегию и первый ход делает Маша?

5. Все шесть маленьких окружностей, изображенные на рисунке, имеют радиус 1 и касаются большой окружности и сторон равностороннего треугольника ABC, причем точки касания K, L и M являются соответственно серединами сторон AB, BC и AC треугольника. Найти радиус большой окружности и длину стороны треугольника ABC.



XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 1997 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что положительное целое число n является составным тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные целые числа a, b, x и y, что $a+b=n$ и $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

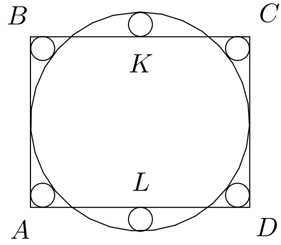
2. Длины сторон треугольника a, b и c удовлетворяют равенству
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=c^2\,.$$
Найти величину угла, противолежащего стороне c.

3. Каждая диагональ выпуклого пятиугольнка параллельна одной из сторон этого пятиугольника. Доказать, что отношение длин диагонали и параллельной ей стороны одинаково для всех пяти диагоналей, и найти это отношение.

4. На плоскости даны n точек $(n \geqslant 3)$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Всегда ли можно выбрать три из этих точек так, чтобы
   а) внутри;
   б) внутри и на границе

   окружности, проходящей через эти три точки, не было бы ни одной другой данной точки?

5. Все шесть маленьких окружностей, изображенные на рисунке, имеют радиус 1 и касаются большой окружности и сторон прямоугольника $ABCD$, причем точки касания K и L являются соответственно серединами его сторон BC и AD. Кроме того, большая окружность касается сторон AB и CD прямоугольника. Найти радиус большой окружности.



XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 1997 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Для любых двух положительных целых чисел m и n обозначим

$$T(m,n) = \text{НОД}\left(m, \frac{n}{\text{НОД}\,(m,n)}\right),$$

где НОД (x,y) — наибольший общий делитель чисел x и y.

а) Доказать, что существует бесконечно много пар чисел $(m,\, n)$, для которых $T(m,n) > 1$ и $T(n,m) > 1$.
б) Существуют ли такие числа m и n, для которых $T(m,n) = T(n,m) > 1$?

2. Функция f при любом положительном целом числе n удовлетворяет условию

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n).$$

Найти $f(1997)$, если $f(1) = 999$.

3. Внутри правильного тетраэдра находится шар, касающийся всех его граней. Внутри шара находится другой правильный тетраэдр, все вершины которого расположены на поверхности шара. Найти отношение объемов этих двух тетраэдров.

4. Проведенные на плоскости 19 прямых разбивают плоскость ровно на 97 частей (конечных и бесконечных).

а) Доказать, что среди этих частей есть по крайней мере один треугольник.
б) Показать, что действительно можно разместить на плоскости 19 прямых описанным в задаче способом.

5. Найти длину большей стороны изображенного на рисунке прямоугольника, если длина его меньшей стороны равна 1 и окружности касаются друг друга и сторон прямоугольника.