Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 1997. a.

Lahendused ja vastused

9. klass

1. Paneme tähele, et $2^3 = 7\cdot 1^2 + 1^2$, $2^4 = 7\cdot 1^2 + 3^2$ ning kui $2^n = 7x^2 + y^2$, siis $2^{n+2} = 7\cdot(2x)^2 + (2y)^2$. Seega sobib paarituarvuliste n väärtuste korral $x = y = 2^{\frac{n-3}{2}}$ ning paarisarvuliste n väärtuste korral $x = 2^{\frac{n-4}{2}}$ ja $y = 3x$.

   Märkus: õigupoolest on ülaltoodud arutelu induktsioon n järgi, mida tehakse eraldi paaris- ja paarituarvuliste n väärtuste korral.

2. *Vastus*: Sobivad arvud on $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$.

   Lahendus 1: Tehes võrrandis $ax^2 + bx + c = 0$ asenduse $x = 2 + \sqrt{3}$, saame $a(2+\sqrt{3})^2 + b(2+\sqrt{3}) + c = 0$, ehk $(7a+2b+c) + (4a+b)\sqrt{3} = 0$. Leiame kordajatele a, b, c sellised väärtused, et $7a + 2b + c = 0$ ja $4a + b = 0$. Avaldades neist võrdustest b ja c, saame $b = -4a$ ning $c = -7a - 2b = -7a - 2\cdot(-4a) = a$. Niisiis on sobivad arvud näiteks $a = 1$, $b = -4$ ja $c = 1$.

   Lahendus 2: Võrrandist $x^2 + 2mx + n = 0$ saame $x = -m \pm \sqrt{m^2 - n}$. Meil on vaja, et üks lahend oleks $x = 2 + \sqrt{3}$, niisiis otsime selliseid arve m ja n, et kehtiksid võrdused $2 = -m$, $\sqrt{3} = \sqrt{m^2 - n}$. Siit $m = -2$, $n = 1$ ning seega $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$.

   Lahendus 3: Püüame leida ruutvõrrandile $x^2 + px + q = 0$ selliseid kordajaid, et selle lahenditeks oleksid $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ ja $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Viete'i valemitest saame $p = -(x_1 + x_2) = -(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = -4$ ja $q = x_1 x_2 = (2 + \sqrt{3})\cdot(2 - \sqrt{3}) = 1$.

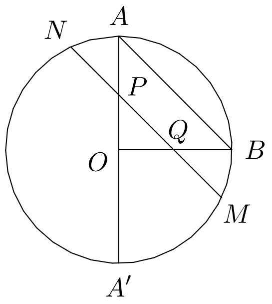
3. *Vastus*: 10.

   Lahendus 1: Olgu ringjoone raadius r, siis $|OA| = |OB| = r$ ja $|AB| = r\sqrt{2}$. Olgu Q kõõlu MN lõikepunkt raadiusega OB.

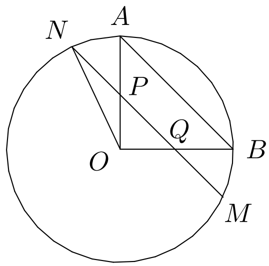
Et sümmeetria tõttu on lõigud MQ ja NP võrdse pikkusega, siis $|PQ| = |MP| - |MQ| = 12 - 2\sqrt{14}$. Tõmbame lisaks raadiuse ON ja ristlõigu OR kõõlule MN (vt. joonist 1) ning rakendame Pythagorase teoreemi kolmurgale ONR. Et $|ON| = r$ ja $|OR| = |PR| = \dfrac{|PQ|}{2} = 6 - \sqrt{14}$ ja $|NR| = \dfrac{|MN|}{2} = 6 + \sqrt{14}$, siis

$$r^2 = |OR|^2 + |NR|^2 = 2 \cdot (6^2 + 14) = 100\ ,$$

kust $r = 10$.



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus 2: Kuna lõigud AB ja MN on paralleelsed, siis on kolmnurgad OPQ ja OAB sarnased ning $\dfrac{|OP|}{|OA|} = \dfrac{|PQ|}{|AB|}$. Arvutame siit lõigu $|OP|$ pikkuse:

$$|OP| = \frac{|OA| \cdot |PQ|}{|AB|} = \frac{r \cdot (12 - 2\sqrt{14})}{r\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{7}\ .$$

Pikendame raadiuse AO diameetriks AA' (vt. joonist 2). Kõõlud AA' ja NM lõikuvad punktis P, seega $|AP| \cdot |PA'| = |NP| \cdot |PM|$ ehk $(r - |OP|) \cdot (r + |OP|) = 24\sqrt{14}$, millest $r^2 = 24\sqrt{14} + |OP|^2$. Asendades viimasesse võrdusse $|OP|$ väärtuse, saame $r^2 = 100$.

Lahendus 3: Rakendame koosinusteoreemi kolmurgale ONQ (vt. joonist 1). Et $|ON| = r$, $|OQ| = \dfrac{|PQ|}{\sqrt{2}}$, $|PQ| = 2 \cdot (6 - \sqrt{14})$ ja

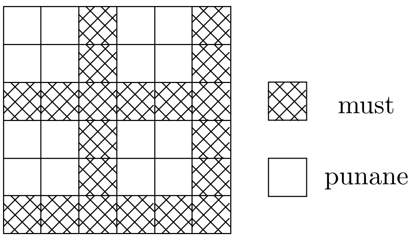
$\angle OQN = 45^\circ$, siis

$$\begin{aligned} r^2 &= |QN|^2 + |OQ|^2 - 2 \cdot |QN| \cdot |OQ| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= |QN|^2 + \frac{1}{2}|PQ|^2 - |QN| \cdot |PQ| = 100\,. \end{aligned}$$

4. *Vastus*: punaseid ruute on $4n^2$ ja musti $5n^2$.

Jaotame ruudustiku n^2 ruudukujuliseks tükiks, igaüks mõõtmetega 3×3 ruutu, ning vaatleme iga sellise tüki keskmist ruutu. Kui see ruut on punane, siis on tal viis musta naaberruutu, järelikult ülejäänud kolm naaberruutu on punased ning vaadeldava üheksa ruudu seas on viis musta ja neli punast ruutu. Kui keskmine ruut on must, on tal neli punast ja neli musta naaberruutu ning vaadeldava üheksa ruudu seas on seega jällegi viis musta ja neli punast ruutu. Järelikult on igas 3×3 ruudust koosnevas tükis täpselt viis musta ja neli punast ruutu ning kõigi $9n^2$ ruudu seas seega $5n^2$ musta ja $4n^2$ punast ruutu.

Märkus: Joonisel 3 on näidatud ülesande tingimusi rahuldav ruutude värvimine $n = 2$ korral.



Joonis 3

5. *Vastus*: 200.

Olgu mingi päeva algul saarel l lohet, m madu ja k krokodilli, siis hommikueine järel on lohede arv $l' = l - m$, lõunasöögi järel krokodillide arv $k' = k - l' = k - l + m$ ja õhtusöögi järel madude arv $m' = m - k' = l - k$, s.t. selle päeva lõpul on saarel l' lohet, m' madu ja k' krokodilli. Avaldades arvud k, l ja m arvude k', l' ja m' kaudu leiame, et kui mingi päeva lõpul on saarele jäänud l' lohet, m' madu ja k' krokodilli, siis selle päeva algul (ja ühtlasi eelmise päeva lõpul) oli saarel $l = k' + l' + m'$ lohet, $m = k' + m'$ madu ja $k = k' + l'$ krokodilli. Arvestades, et kuuenda päeva lõpul oli saarel 0 lohet, 0 madu ja 1 krokodill, saame koostada järgmise tabeli:

Aeg	Lohesid	Madusid	Krokodille
kuuenda päeva lõpul	0	0	1
viienda päeva lõpul	1	1	1
neljanda päeva lõpul	3	2	2
kolmanda päeva lõpul	7	4	5
teise päeva lõpul	16	9	12
esimese päeva lõpul	37	21	28
esimese päeva algul	86	49	65

Seega oli maailma loomise järel lohesid, madusid ja krokodille saarel kokku 200.

10. klass

1. *Vastus*: a) $(2, t{+}1, t, t)$, kus t on suvaline positiivne täisarv; b) $(3, t{+}1, t, t, t)$, $(2, t{+}2, t{+}1, t, t)$, $(2, t{+}2, t, t{+}1, t)$ ja $(2, t{+}2, t, t, t{+}1)$, kus t on suvaline positiivne täisarv.

   a) Ilmselt $a > 1$ ja üldisust kitsendamata võime eeldada, et $k > l \geqslant m$. Jagades võrduse läbi arvuga a^m, saame $a^{k-m} = a^{l-m} + 1$. Kui $l - m > 0$, siis peaks arv 1 jaguma arvuga $a > 1$, seega $l = m$ ja $a^{k-m} = 2$, kust ainsa võimalusena leiame $a = 2$, $k - m = 1$. Järelikult on võrrandi lahenditeks nelikud kujul $(2, t{+}1, t, t)$, kus t on suvaline positiivne täisarv.

   b) Taas $a > 1$ ning üldisust kitsendamata eeldame, et $k > l \geqslant m \geqslant n$. Jagades võrduse läbi arvuga a^n, saame $a^{k-n} = a^{l-n} + a^{m-n} + 1$. Analoogiliselt juhuga a) leiame $m - n = 0$, seega $a^{k-n} = a^{l-n} + 2$. Edasi vaatleme kahte juhtu:

   1) kui $l - n = 0$, siis $a^{k-n} = 3$, kust $a = 3$ ja $k = n + 1$.
   2) kui $l - n > 0$, siis $a = 2$, sest $a > 1$ peab olema arvu 2 jagaja. Seega $2^{k-n} = 2^{l-n} + 2$, millest ainsa võimalusena $l - n = 1$ ja $k - n = 2$.

Võrrandi lahenditeks on seega viisikud kujul $(3, t{+}1, t, t, t)$ ja $(2, t{+}2, t{+}1, t, t)$ ning sümmeetria tõttu ka $(2, t{+}2, t, t{+}1, t)$ ja $(2, t{+}2, t, t, t{+}1)$, kus t on suvaline positiivne täisarv.

2. *Lahendus 1*: Liites võrratuste $(x - \sqrt{y^2+1})^2 \geqslant 0$ ja $(y - \sqrt{x^2+1})^2 \geqslant 0$ vastavad pooled, saame

$$(x - \sqrt{y^2+1})^2 + (y - \sqrt{x^2+1})^2 \geqslant 0 .$$

Avades siin sulud, viies juurega liikmed ühele poole ning jagades selle tulemusena saadud võrratuse mõlemad pooled kahega, saame

$$x^2 + y^2 + 1 \geqslant x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} .$$

Võrdus saaks siin kehtida ainult juhul, kui üheaegselt kehtiksid võrdused $(x - \sqrt{y^2+1})^2 = 0$ ja $(y - \sqrt{x^2+1})^2 = 0$, s.t. $x^2 = y^2 + 1$ ja $y^2 = x^2 + 1$, mis ilmselt ei ole võimalik.

Lahendus 2: Positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise seose põhjal saame $\dfrac{x^2 + (y^2+1)}{2} \geqslant \sqrt{x^2(y^2+1)} \geqslant x\sqrt{y^2+1}$ ja $\dfrac{(x^2+1) + y^2}{2} \geqslant \sqrt{y^2(x^2+1)} \geqslant y\sqrt{x^2+1}$. Liites nende võrratuste vastavad pooled, saamegi soovitud võrratuse ning sarnaselt eelmise lahendusega veendume, et võrdust siin kehtida ei saa.

3. *Vastus:* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tähistame $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$.

Lahendus 1: Tähistame lisaks $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Kasutades koosinusteoreemi ja kolmnurga pindala valemit kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu, saame

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{bc\sin\alpha}{bc\cos\alpha} = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2} .$$

Analoogiliselt saame ka $\tan\beta = \dfrac{4S}{a^2 + c^2 - b^2}$ ja $\tan\gamma = \dfrac{4S}{a^2 + b^2 - c^2}$.

Seepärast $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$ ning $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\gamma} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + b^2 - a^2}$, millest $3b^2 - 3a^2 = c^2 = \dfrac{1}{2}b^2 + a^2$. Neist võrdustest leiame $b = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $c = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$ ja $\dfrac{b}{c} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lahendus 2: On ilmne, et $0 < \alpha < \beta < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$, sest kõikide nurkade tangensid peavad olema positiivsed. Et kolmnurgas $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, siis

$$\tan\gamma = -\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1}\ .$$

Et $\tan\beta = 2\tan\alpha$ ja $\tan\gamma = 3\tan\alpha$, siis $3\tan\alpha = \dfrac{3\tan\alpha}{2\tan^2\alpha - 1}$, kust $\tan^2\alpha = 1$ ja $\tan\alpha = 1$, $\tan\alpha = 2$, $\tan\alpha = 3$.
Olgu nüüd $\sin\beta = x$ ja $\sin\gamma = y$, siis $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2$ ja $\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 3$, kust $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ja $y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Siinusteoreemi kohaselt $\dfrac{|AC|}{\sin\beta} = \dfrac{|AB|}{\sin\gamma}$, millest $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. *Vastus:* Jüri võidab, kui m ja n on mõlemad paaritud arvud; vastasel juhul võidab Mari.

   Paneme tähele, et mängija, kelle käigul olles on mõlemas kuhjas paaritu arv kompvekke, on sunnitud jaotama ühe neist kuhjadest kaheks niisuguseks kuhjaks, millest ühes on paarisarv kompvekke. Mängija, kelle käigul olles on vähemalt ühes kuhjas paarisarv kompvekke, võib aga alati jaotada selle kuhja kaheks paarituarvulise kompvekkide arvuga kuhjaks.

   Mängu kaotab see, kelle käigul olles on kummaski kuhjas üksainus kompvek (s.t. paaritu arv). Seega juhul, kui mängu algul on vähemalt ühes kuhjas paarisarv kompvekke, on Maril olemas võitev strateegia: jaotada igal oma käigul paarisarvulise kompvekkide arvuga kuhi kaheks paarituarvulise kompvekkide arvuga kuhjaks. Kui aga mängu algul on mõlemas kuhjas paaritu arv kompvekke, siis saab Mari mistahes avakäigu järel sama strateegiat kasutada Jüri.

5. *Vastus*: suure ringjoone raadius on 7 ja kolmnurga küljepikkus $10\sqrt{3}$.

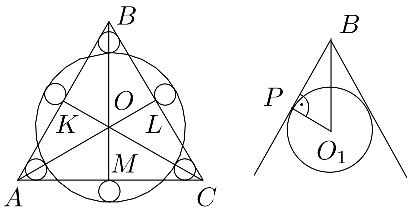
Olgu O kolmnurga ABC mediaanide AL, BM ja CK lõikepunkt (seega ühtlasi ka suure ringjoone keskpunkt), R suure ringjoone raadius ja O_1 kolmnurga tipu B juures paikneva väikese ringjoone keskpunkt. Et kõik väikesed ringjooned on raadiusega 1, siis $|OM| = R-2$ ja $|BO| = R + 1 + |BO_1|$ (vt. joonist 4). Täisnurksest kolmnurgast BO_1P, kus P on vaadeldava väikese ringjoone puutepunkt kolmnurga küljega AB, leiame

$$|BO_1| = \frac{|PO_1|}{\sin \angle PBO_1} = 2\ .$$

Võrdusest $|BO| = 2|OM|$ saame nüüd $R+3 = 2\cdot(R-2)$, kust $R = 7$. Võrdkülgse kolmnurga ABC kõrgus on

$$|BM| = |BO| + |OM| = (R+3) + (R-2) = 2R+1 = 15$$

ja küljepikkus seega $15 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$.



Joonis 4

11. klass

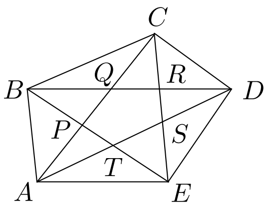
1. Leidugu positiivse täisarvu n jaoks niisugused positiivsed täisarvud a, b, x ja y, et $a + b = n$ ja $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Siis $bx + ay = ab$, s.t. $bx = a(b - y)$. Kui $\text{SÜT}\,(a, b) = 1$, siis peab a olema arvu x jagaja ning $\dfrac{x}{a} \geqslant 1$, mis on aga vastuolus võrdusega $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Seega $\text{SÜT}\,(a, b) = d > 1$ ning arv $n = a + b$ jagub arvuga d, $1 < d < n$, s.t. on kordarv.

   Teiselt poolt, kui $n = kl$, kus $k, l > 1$, siis on arvud $a = k$,

$b = (l-1)k$, $x = 1$ ja $y = (k-1)(l-1)$ nõutavate omadustega: $a + b = k + (l-1)k = lk = n$ ja $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{k-1}{k} = 1$.

2. *Vastus*: 60°.

Korrutades antud võrduse mõlemad pooled läbi suurusega $a+b+c$, saame $a^3 + b^3 = ac^2 + bc^2$. Taandamine ühise teguriga $a+b$ annab $a^2+b^2-ab = c^2$ ehk $ab = a^2+b^2-c^2$. Vastavalt koosinusteoreemile aga $2ab\cos\gamma = a^2+b^2-c^2$, kus γ on külje c vastas paikneva nurga suurus. Järelikult peab olema $2\cos\gamma = 1$, millest $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$ ja $\gamma = 60^\circ$.



Joonis 5

3. *Vastus:* Diagonaali ja sellega paralleelse külje pikkuste suhe on $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Olgu viisnurga $ABCDE$ diagonaalide lõikepunktid P, Q, R, S ja T, nii nagu näidatud joonisel 5. Et $AB \parallel CE$, $AE \parallel BD$ ja $AD \parallel BC$, siis on nelinurgad $ABCS$ ja $ABRE$ rööpkülikud, s.t. $|CS| = |AB| = |RE|$, kust $|CR| = |SE|$. Nii jaotavad diagonaalide lõikepunktid iga diagonaali kolmeks osaks, millest kaks äärmist on võrdse pikkusega. Kolmnurkade APB ja CPE sarnasusest saame $\dfrac{|CE|}{|AB|} = \dfrac{|PC|}{|AP|} = \dfrac{|PE|}{|BP|}$. Et

$$|PC| = |PQ| + |QC| = |PQ| + |AP|$$

ja

$$|PE| = |PT| + |TE| = |PT| + |BP|\,,$$

siis $\dfrac{|PQ| + |AP|}{|AP|} = \dfrac{|PT| + |BP|}{|BP|}$, kust $\dfrac{|PQ|}{|AP|} = \dfrac{|PT|}{|BP|} = \dfrac{|PT|}{|TE|}$. Olgu see suhe c, siis

$$\frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|PE|}{|BP|} = \frac{|PT| + |TE|}{|TE|} = c + 1$$

ja analoogiliselt veendume, et iga diagonaali ja sellega paralleelse külje pikkuste suhe on $c + 1$.

Teiselt poolt,

$$\frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|CR| + |RE|}{|RE|} = \frac{|CR|}{|RS| + |SE|} + 1 = \frac{|CR|}{|RS| + |CR|} + 1 \, .$$

Et $\dfrac{|RS|}{|CR|} = c$, saame $c = \dfrac{1}{c+1}$, kust $c = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ning $c+1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

4. *Vastus*: a) jah, b) ei.

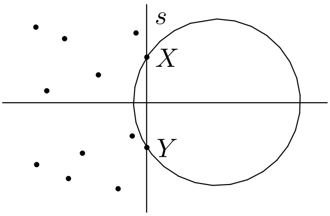
   a) Valime kõigepealt kaks antud punkti X ja Y nii, et kõik ülejäänud antud punktid paiknevad punkte X ja Y läbivast sirgest s ühel pool. (Sellised punktid võime leida järgmiselt: valime algul sirge, millest kõik antud punktid on ühel pool, ning nihutame selle paralleellükkega lähima antud punktini. Kui saadud sirgel paikneb vaid üks antud punkt, pöörame sirget ümber selle punkti, kuni see läbib ka mingit teist antud punkti.)

   Leiame nüüd punkte X ja Y läbiva ringjoone, mille sisepiirkonnas ei paikne ühtki antud punkti — see on ilmselt nii, kui ringjoone keskpunkt paikneb lõigu XY keskristsirgel, ülejäänud antud punktidest teisel pool sirget s ning sirgest s küllalt kaugel (vt. joonist 6). Nihutades ringjoone keskpunkti mööda lõigu XY keskristsirget sirge s suunas (vajaduse korral ka teisele poole sirget s) jõuame kindlasti olukorrani, kus ringjoon läbib veel vähemalt üht antud punkti, kuid selle sisepiirkonnas antud punkte ei ole. (Viimase väite tõestuseks paneme tähele, et kui ringjoone keskpunkt nihutada esialgse asendiga võrreldes küllalt kaugele teisele poole sirget s, siis sisaldab see ringjoon oma sisepiirkonnas kõik antud punktid peale X ja Y.)

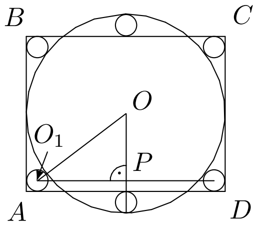
   b) Tõestuseks piisab valida $n > 3$ punkti ühel ringjoonel.

5. *Vastus*: 9.

   Olgu O suure ringjoone keskpunkt, O_1 ristküliku tipu A juures paikneva väikese ringjoone keskpunkt ning P tippude A ja D juures paiknevate väikeste ringjoonte keskpunkte ühendava lõigu ja sellega ristuva suure ringjoone raadiuse lõikepunkt (vt. joonist 7). Tähistagu R suure ringjoone raadiust, siis $|O_1O| = R+1$, $|O_1P| = R-1$ ja $|OP| = R-3$. Võrdusest $|O_1O|^2 = |O_1P|^2 + |OP|^2$ saame $(R+1)^2 = (R-1)^2 + (R-3)^2$ ehk $R^2 - 10R + 9 = 0$, kust $R = 9$ (teine lahend $R = 1$ ilmselt ei sobi).



Joonis 6



Joonis 7

12. klass

1. *Vastus:* b) selliseid arve ei leidu.

a) Olgu $m = p^2q$, $n = q^2p$, kus p ja q on erinevad algarvud. Siis $\text{SÜT}\,(m,n) = pq$, $\dfrac{n}{\text{SÜT}\,(m,n)} = q$ ja $T(m,n) = q > 1$. Analoogiliselt saame $T(n,m) = p > 1$. Kuna algarve on lõpmata palju, siis on ka nõutud omadusega arvupaare lõpmata palju.

b) Vastavalt definitsioonile jagab arv $T(m,n)$ arvu $\dfrac{n}{\text{SÜT}\,(m,n)}$ ning arv $T(n,m)$ jagab arvu $\dfrac{m}{\text{SÜT}\,(m,n)}$. Kui nüüd $T(m,n) = T(n,m)$, siis arv $T(m,n)$ jagab arvude $\dfrac{n}{\text{SÜT}\,(m,n)}$ ja $\dfrac{m}{\text{SÜT}\,(m,n)}$ suurimat ühistegurit, mis aga on 1. Järelikult sel juhul $T(m,n) = 1$ ning ülesandes nõutud arve ei leidu.

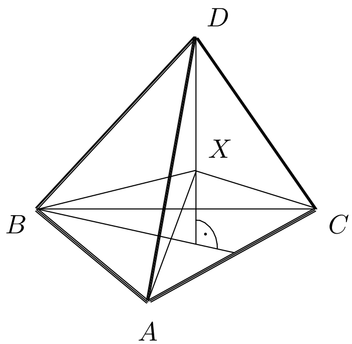
2. *Vastus*: $\dfrac{1}{1997}$.

Ülesande tingimusest saame $f(1) + \ldots + f(n-1) + f(n) = n^2 f(n)$ ja $f(1) + \ldots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$. Lahutades esimesest võrdusest teise, leiame $(n^2-1)f(n) = (n-1)^2 f(n-1)$, kust

$f(n)=\dfrac{n-1}{n+1}f(n-1)$. Kasutades leitud seost korduvalt, saame

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n-1}{n+1}\cdot f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot f(n-2)=\ldots= \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n+1)n\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3}\cdot f(1)=\frac{2f(1)}{n(n+1)}\,. \end{aligned}$$

Et $f(1)=999$, siis $f(1997)=\dfrac{2\cdot 999}{1997\cdot 1998}=\dfrac{1}{1997}$.



Joonis 8

3. *Vastus*: $27:1$.

   Leiame korrapärase tetraeedri ümber ja sisse kujundatud kerade raadiuste suhte. Et ülesandes vaadeldav kera on kujundatud ühe tetraeedri sisse ja teise ümber ning tetraeedri ümber kujundatud kera raadius on võrdeline tetraeedri serva pikkusega, siis on leitav suhe ühtlasi võrdne nende kahe tetraeedri servapikkuste suhtega.

   Olgu X korrapärase tetraeedri $ABCD$ kõrguste lõikepunkt (ja ühtlasi mõlema vaadeldava kera keskpunkt). Kuna tetraeeder $ABCD$ koosneb neljast kongruentsest tetraeedrist $ABCX$, $ABDX$, $ACDX$ ja $BCDX$, siis tetraeedri $ABCX$ ruumala on võrdne ühe neljandikuga tetraeedri $ABCD$ ruumalast (vt. joonist 8). Et tetraeedritel $ABCD$ ja $ABCX$ on ühine põhi ABC ning tetraeedri $ABCD$ tipust D tahule ABC tõmmatud kõrgus DE läbib punkti X, siis XE on tetraeedri $ABCX$ tipust X tahule ABC tõmmatud kõrgus, mistõttu $|DE|=4|XE|$ ja $|DX|=3|XE|$. Lõigud DX ja XE on aga vastavalt suurema ja väiksema vaadeldava kera raadiusteks.

Niisiis on vaadeldavate tetraeedrite servapikkuste suhe $3:1$ ja ruumalade suhe seega $27:1$.

4. a) Piisab tõestada, et antud 19 sirge hulgas leiduvad kolm paarikaupa mitteparalleelset sirget, mis ei lõiku ühes punktis. Tõepoolest, kuna sirgete tõmbamise järjekord ei ole ilmselt oluline, võime need kolm sirget tõmmata esimestena — sellega jaotame tasandi 7 tükiks, millest üks on kolmnurk, ning iga järgmise sirge lisamisel jääb olemasolev kolmnurkne tükk kas terveks või jaotub kaheks osaks, millest vähemalt üks on jällegi kolmnurk.

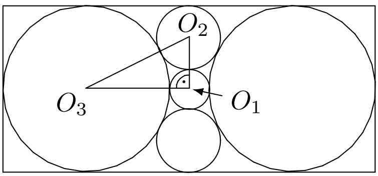
   Niisuguste kolme sirge olemasolu tõestamiseks jaotame kõik 19 sirget paralleelsete sirgete klassidesse $K_1, K_2, \ldots, K_n$ (s.t. mistahes kaks samasse klassi K_i kuuluvat sirget on paralleelsed ning mistahes kaks erinevatesse klassidesse K_i ja K_j kuuluvat sirget lõikuvad). Kui siin $n = 1$, s.t. kõik 19 sirget on paralleelsed, siis on tasandi tükkide arv 97 asemel 20. Kahe klassi korral, mis sisaldavad vastavalt k_1 ja k_2 sirget, on tükkide arv $(k_1+1)(k_2+1)$, mis ei saa olla võrdne algarvuga 97. Seega $n \geqslant 3$. Kui $n < 19$, siis leiduvad 19 sirge hulgas kindlasti kaks paralleelset sirget s_1 ja s_2 (sest mingi klass K_i on vähemalt kaheelemendiline) ning sirged s_3 ja s_4, mis ei ole paralleelsed omavahel ega sirgetega s_1 ja s_2 (sest $n \geqslant 3$). Lõigaku sirge s_3 sirgeid s_1 ja s_2 vastavalt punktides X_1 ja X_2, siis sirge s_4 läbib ülimalt üht neist punktidest ning vajalikud kolm sirget on s_1, s_3, s_4 või s_2, s_3, s_4. Kui $n = 19$ (s.t. kui kõik 19 sirget on paarikaupa mitteparalleelsed), siis ei leidu nõutava omadusega kolme sirget vaid juhul, kui kõik 19 sirget lõikuvad ühes punktis — tasandi tükkide arv on aga sel juhul 38.

   b) Näitame, et kui klassides $K_1, \ldots, K_n$ on vastavalt $k_1, \ldots, k_n$ sirget ja ükski kolm sirget ei lõiku ühes punktis, siis on tasandi tükkide koguarv $k_1k_2 + k_1k_3 + \ldots + k_{n-1}k_n + k_1 + k_2 + \ldots + k_n + 1$. See valem kehtib ilmselt $n = 1$ ja $n = 2$ korral (vt. punktis a) esitatud arutlust). Kehtigu nüüd see valem $n-1$ paralleelsete sirgete klassi korral, s.t. neisse klassidesse kuuluvad $m = k_1 + \ldots + k_{n-1}$ sirget jaotavad tasandi $N = k_1k_2 + \ldots + k_{n-2}k_{n-1} + k_1 + \ldots + k_{n-1} + 1$ osaks. Iga sirge klassist K_n lõikub igaühega neist m sirgest (ja ainult nendega!) ning jaotab kaheks osaks seega $m+1$ olemasolevat tasandi tükki. Seega on tükkide koguarv n paralleelsete sirgete klassi korral tõepoolest $N + k_n \cdot (m+1) = k_1k_2 + \ldots + k_{n-1}k_n + k_1 + \ldots + k_n + 1$.

Niisiis piisab meil leida niisugused positiivsed täisarvud n ning $k_1, \ldots, k_n$, et $k_1 + \ldots + k_n = 19$ ja $k_1k_2 + \ldots + k_{n-1}k_n = 77$, ehk samaväärselt $k_1 + \ldots + k_n = 19$ ja $k_1^2 + \ldots + k_n^2 = 19^2 - 2 \cdot 77 = 207$. Otsene kontroll näitab, et sobivad arvud on $n = 4$ ja $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 3$, $k_4 = 14$.

5. *Vastus*: $\sqrt{5}$.

Olgu O_1, O_2 ja O_3 vastavalt keskmise, ülemise ja vasakpoolse ringjoone keskpunktid ning r, ρ ja R vastavalt nende ringjoonte raadiused. Täisnurksest kolmnurgast $O_3O_1O_2$ saame $(R+\rho)^2 = (R+r)^2+(\rho+r)^2$ (vt. joonist 9), ehk $2R\rho = 2Rr+2\rho r+2r^2$. Arvestades seost $2\rho = R-r$ võime selle võrduse kirjutada kujul $R(R-r) = 2Rr + (R-r)r + 2r^2$, ehk $R^2 = 4Rr + r^2$. Liites võrduse mõlemale poolele $4R^2$, saame $5R^2 = (2R + r)^2$, kust $\left(\frac{2R + r}{R}\right)^2 = 5$. Et R ja $2R + r$ on võrdsed vastavalt poolega ristküliku lühema ja pikema külje pikkusest ning ristküliku lühema külje pikkus on 1, siis pikema külje pikkus on $\sqrt{5}$.



Joonis 9