Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 1997. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et iga täisarvu $n \geqslant 3$ jaoks leiduvad niisugused positiivsed täisarvud x ja y, mille korral kehtib võrdus $2^n = 7x^2 + y^2$.

2. Leia niisugused täisarvud $a \neq 0$, b ja c, et arv $x = 2 + \sqrt{3}$ oleks ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendiks.

3. Punktid A, B, M ja N paiknevad ringjoonel keskpunktiga O nii, et raadiused OA ja OB on teineteisega risti ning kõõl MN on paralleelne lõiguga AB ja lõikab raadiust OA punktis P. Leia ringjoone raadius, kui $|MP| = 12$ ja $|PN| = 2\sqrt{14}$.

4. Ruudustikus mõõtmetega $3n \times 3n$ on iga ruut värvitud kas mustaks või punaseks. Igal punasel ruudul, mis ei asu ruudustiku servas, on kaheksa naaberruudu hulgas täpselt viis musta ruutu. Igal mustal ruudul, mis ei asu ruudustiku servas, on naaberruutude hulgas täpselt neli punast ruutu. Mitu musta ja mitu punast ruutu on ruudustikus?

5. Maailma loomise järel on üksik saar asustatud lohede, madude ja krokodillidega. Iga saareelanik sööb üks kord päevas: iga madu sööb hommikueineks ühe lohe, iga lohe sööb lõunaks ühe krokodilli ja iga krokodill sööb õhtusöögiks ühe mao. Leia lohede, madude ja krokodillide koguarv saarel vahetult pärast maailma loomist (esimese päeva algul), kui kuuenda päeva lõpuks on saarele ainsana alles jäänud üks krokodill ja nende kuue päeva jooksul pole keegi saare elanikest pidanud ühestki oma söögikorrast toidu puudusel loobuma.

Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 1997. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

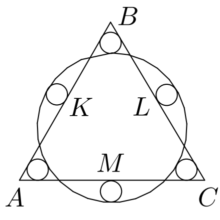
1. Leia:
   a) kõik niisugused positiivsete täisarvude nelikud (a, k, l, m), mille korral kehtib võrdus $a^k = a^l + a^m$;
   b) kõik niisugused positiivsete täisarvude viisikud (a, k, l, m, n), mille korral kehtib võrdus $a^k = a^l + a^m + a^n$.

2. Tõesta, et mistahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus
$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}\,.$$

3. Kolmnurgas ABC suhtuvad suurused $\tan\angle A$, $\tan\angle B$ ja $\tan\angle C$ üksteisesse nagu arvud 1, 2 ja 3. Leia kolmnurga külgede AC ja AB pikkuste suhe.

4. Mari ja Jüri mängivad järgmist mängu. Algul on laual kaks kuhja, milles on vastavalt m ja n kompvekki. Igal käigul võtab mängija ühe kuhja kompvekke laualt ära ja jaotab teise kuhja oma äranägemist mööda kaheks mittetühjaks osaks, seejuures kompvekke tükeldamata. Käike sooritatakse kordamööda ja kaotab mängija, kes ei saa enam käiku teha. Kumb mängijatest võidab, kui mõlemad kasutavad optimaalset strateegiat ja Mari teeb esimese käigu?

5. Joonisel kujutatud kuus väikest ringjoont on kõik raadiusega 1 ning puutuvad suurt ringjoont ja võrdkülgse kolmnurga ABC külgi, kusjuures puutepunktid K, L ja M on vastavalt kolmnurga külgede AB, BC ja AC keskpunktideks. Leia suure ringjoone raadius ja kolmnurga ABC küljepikkus.



Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 1997. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et positiivne täisarv n on kordarv siis ja ainult siis, kui leiduvad niisugused positiivsed täisarvud a, b, x ja y, et $a+b=n$ ja $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

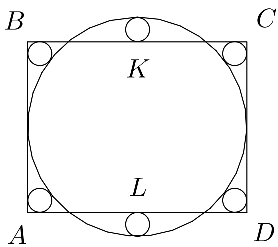
2. Kolmnurga külgede pikkused a, b ja c rahuldavad võrdust
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=c^2\,.$$
Leia külje c vastas asuva nurga suurus.

3. Kumera viisnurga iga diagonaal on paralleelne viisnurga ühe küljega. Tõesta, et diagonaali ja sellega paralleelse külje pikkuste suhe on kõigi viie diagonaali korral sama, ning leia see suhe.

4. Tasandil on antud n punkti $(n \geqslant 3)$, millest ükski kolmik ei asu ühel sirgel. Kas nende punktide seast on alati võimalik valida kolm punkti nii, et läbi nende joonestatud ringjoone
   a) sisepiirkonnas;
   b) sisepiirkonnas ega ringjoonel

   ei asu ühtki teist antud punkti?

5. Joonisel kujutatud kuus väikest ringjoont on kõik raadiusega 1 ning puutuvad suurt ringjoont ja ristküliku $ABCD$ külgi, kusjuures puutepunktid K ja L on vastavalt ristküliku külgede BC ja AD keskpunktideks. Suur ringjoon puutub ristküliku külgi AB ja CD. Leia suure ringjoone raadius.



Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 1997. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Mistahes positiivsete täisarvude m ja n korral tähistame

$$T(m,n) = \mathrm{SÜT}\left(m, \frac{n}{\mathrm{SÜT}\,(m,n)}\right),$$

kus $\mathrm{SÜT}\,(x,y)$ on arvude x ja y suurim ühistegur.

   a) Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid arvupaare (m, n), mille korral $T(m,n) > 1$ ja $T(n,m) > 1$.
   b) Kas leiduvad arvud m ja n, mille korral $T(m,n) = T(n,m) > 1$?

2. Funktsioon f rahuldab iga positiivse täisarvu n korral tingimust

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n).$$

Leia $f(1997)$, kui $f(1) = 999$.

3. Korrapärase tetraeedri sisse on paigutatud kera, mis puutub selle kõiki tahke. Kerasse on omakorda paigutatud teine korrapärane tetraeeder, mille kõik tipud asuvad kera pinnal. Leia nende kahe tetraeedri ruumalade suhe.

4. Tasandile tõmmatud 19 sirget jaotavad tasandi täpselt 97 (lõplikuks ja lõpmatuks) tükiks.
   a) Tõesta, et nende tükkide hulgas on vähemalt üks kolmnurk.
   b) Näita, et 19 sirget on tõepoolest võimalik ülesandes kirjeldatud viisil tasandile paigutada.

5. Leia joonisel kujutatud ristküliku pikema külje pikkus, kui selle lühem külg on pikkusega 1 ning ringjooned puutuvad üksteist ja ristküliku külgi.