XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 1996 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. У рыбака, плывшего на гребной лодке против течения реки, с носа лодки в воду упала шапка. Через полчаса рыбак заметил пропажу шапки и сразу повернул назад. Найти скорость течения реки, если рыбак догнал шапку на расстоянии a км от того места, где она упала в воду (скорости течения реки и движения лодки относительно воды считать постоянными).

2. Найдется ли положительное целое число с последней цифрой, отличной от нуля, которая в результате изменения порядка цифр на противоположный увеличивается ровно в два раза?

3. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Диагонали этого четырехугольника делят его углы при вершинах A и B пополам, а углы при вершинах C и D в отношении $1:2$. Найти величины углов четырехугольника $ABCD$.

4. Может ли остаток, полученный в результате деления простого числа $p > 30$ на 30, быть составным числом?

5. Три школьника решили составить настольную игру, пронумеруя для этого клетки игрового поля размером в $m \times n$ клеток числами от 1 до mn так, чтобы клетки с номерами 1 и mn находились в углах игрового поля и любые две клетки, пронумерованные последовательными числами, имели общую сторону. Ребятам удалось договориться о том, какую клетку считать первой (с номером 1), последнюю же клетку (с номером mn) каждый из них хотел разместить в разном углу игрового поля. При каких числах m и n можно поступить по желанию каждого из школьников?

XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 1996 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие пары целых чисел (x, y), чтобы сумма дробей $\frac{19}{x}$ и $\frac{96}{y}$ равнялось произведению этих же дробей.

2. Какое число больше, $\frac{1996^{1995}+1}{1996^{1996}+1}$ или $\frac{1996^{1996}+1}{1996^{1997}+1}$?

3. Имеется $1\,000\,000$ куч по 1996 монет в каждой из них, причем в одной куче только фальшивые монеты, а во всех остальных — только настоящие. Каким наименьшим числом взвешиваний можно определить кучу, содержащую фальшивые монеты, если используемые весы имеют одну чашу и позволяют взвешивать сколь угодно большой вес с точностью до одного грамма, а также известно, что каждая фальшивая монета весит 9 граммов, а каждая настоящая — 10 граммов?

4. Пусть K, L, M и N — соответственно середины сторон CD, DA, AB и BC квадрата $ABCD$. Найти площадь общей части треугольников AKB, BLC, CMD ja DNA, если длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1.

5. Юри и Мари хотят сыграть в следующую игру. В начале игры выбираются числа $n > m \geqslant 0$ и на пустой стол кладется n конфет. Далее игроки начинают по очереди делать ходы. Каждый ход состоит в выборе неотрицательного целого числа $k \leqslant m$ и отнятии со стола k конфет (в случае $k = 0$ игрок не делает ничего). При этом число k, выбранное игроком, не должно совпадать ни с одним из чисел, выбранных тем или другим игроком на каком-либо предыдущем ходе, а также не может превышать числа конфет на столе. Игра заканчивается, если один из игроков не может сделать очередной ход.

   Юри и Мари решили, что сначала Мари выбирает числа n и m, а затем Юри решает, считать ли игрока, сделавшего последний ход, выигравшим или проигравшим. Первый ход делает Мари. Может ли она выбрать числа n и m так, чтобы иметь возможность выиграть игру независимо от решения Юри?

XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 1996 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что при любых целых положительных числах x и y выполняется неравенство $x^x y^y \geqslant x^y y^x$.

2. Дана трапеция, три стороны которой равны между собой, а окружность, диаметром которой является большее основание трапеции, проходит через середины ее боковых сторон. Найти величины углов трапеции.

3. Числа $1992, 1993, 1994, \ldots, 2000$ размещаются в таблице размером в 3×3 клеток так, что образуется "магический квадрат" (т.е. каждое число встречается ровно в одной клетке таблицы и суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали, равны). Доказать, что в средней клетке таблицы стоит число 1996. Какие числа могут быть в угловых клетках таблицы?

4. Доказать, что число $1^n+2^n+\ldots+15^n$ делится на 480 при любом нечетном числе $n \geqslant 5$.

5. На плоскости расположены n треугольников так, что у любых трех из них найдется общая вершина и никакие четыре из них не имеют общей вершины. Найти наибольшее возможное значение числа n.

XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 1996 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть p — фиксированное простое число. Найти все пары положительных целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $p(x-y) = xy$.

2. При каких положительных вещественных числах x выражение

$$x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^{6} + \frac{1996}{x}$$

принимает наименьшее значение?

3. Равносторонний треугольник поворачивают вокруг его центра на угол 30°. Найти площадь общей части исходного и полученного в результате поворота треугольника, если длина стороны треугольника равна 1.

4. Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ найдется такое положительное целое число n, при котором последние три цифры в десятичной записи числа p^n равны 001.

5. В пространстве расположены n (не обязательно правильных) тетраэдров так, что у любых двух из них найдутся две общие вершины и никакие три из этих тетраэдров не имеют двух общих вершин. Найти наибольшее возможное значение числа n.