Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 1996. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus*: Jõe voolu kiirus on $a\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

   Lahendus 1: Olgu jõe voolu kiirus $x\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ ja paadi kiirus vee suhtes $y\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Siis müts liikus allavoolu $\dfrac{a}{x}$ tundi. Kalamees sõitis kõigepealt pool tundi ülesvoolu ja läbis selle aja jooksul $\dfrac{y-x}{2}$ km, seega tagasi tulles kulus tal $\dfrac{y-x}{2(y+x)}$ tundi jõudmaks kohani, kus müts vette kukkus, ning seejärel $\dfrac{a}{y+x}$ tundi mütsile järelejõudmiseks, s.t. kalamees sai mütsi kätte $t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y-x}{2(y+x)}+\dfrac{a}{y+x}$ tunni pärast. Võrdsustades nüüd mõlemad ajad, saame:

$$\frac{a}{x}=\frac{y+x+y-x+2a}{2(y+x)}=\frac{2(y+a)}{2(y+x)}=\frac{y+a}{y+x}\,,$$

   millest $x(y+a)=a(y+x)$ ja $y\neq 0$ tõttu $x=a$.

   Lahendus 2: Vaatleme mütsi ja paadi liikumist jõeveega seotud taustsüsteemis. Müts seisab siis lihtsalt paigal, paat aga liigub algul pool tundi mütsist eemale ja siis sama kiirusega mütsi juurde tagasi. Seega saab kalamees mütsi kätte 1 tund pärast selle kaotamist. Et müts on selle ajaga triivinud a km allavoolu, siis on jõe voolu kiirus $a\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. *Vastus*: Sellist arvu ei leidu.

   Oletame, et selline arv T on olemas; olgu selle esimene number a ja viimane number b (seega arvu $2T$ esimene number on b ja viimane number a). Et arvu T korrutamisel kahega selle kümnendkohtade arv ei muutu, on a väärtuseks 1, 2, 3 või 4. Kuna a on ühtlasi arvu $2T$ viimane number, siis $a = 2$ või $a = 4$ ja arvu T viimane number b peab olema kas 1, 2, 6 või 7. Teiselt poolt, kuna arvu T esimene number a on 2 või 4, siis arvu $2T$ esimene number b on kas 4, 5, 8 või 9. Seega sellist arvu ei leidu.

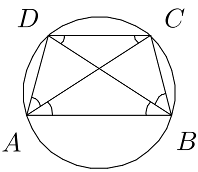
3. *Vastus*: Nurkade suurused on kas $72°, 72°, 108°$ ja $108°$ või $\frac{720}{7}^\circ$, $\frac{720}{7}^\circ$, $5407°$ ja $\frac{540}{7}^\circ$.

   Paneme tähele, et $\angle ACD = \angle ABD$, $\angle CAD = \angle CBD$ ja $\angle BAC = \angle BDC$, kuna need on ühele ja samale kõõlule (vastavalt AD, DC ja CB) toetuvad piirdenurgad (vt. joonist 1). Et lisaks $\angle BAC = \angle CAD$ ja $\angle CBD = \angle ABD$, siis on kõik joonisel 1 kaarega märgitud nurgad võrdsed. Olgu nende nurkade suurus x. Ülesande teksti kohaselt on kaks võimalust:

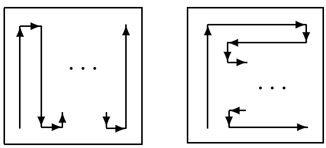
   a) $\angle ADB = 2 \cdot \angle BDC$, siis saame $6 \cdot x + 2 \cdot 2x = 360°$, millest $x = 36°$;

   b) $\angle BDC = 2 \cdot \angle ADB$, siis $6 \cdot x + 2 \cdot \frac{x}{2} = 360°$, millest $x = \frac{360}{7}^\circ$.

   Ühel juhul saame nelinurga nurkade suurusteks $72°$, $72°$, $108°$ ja $108°$, teisel juhul $\frac{720}{7}^\circ$, $\frac{720}{7}^\circ$, $\frac{540}{7}^\circ$ ja $\frac{540}{7}^\circ$.



Joonis 1



Joonis 2

4. *Vastus*: Ei.

   Olgu $p = 30 \cdot q + r$. Oletame, et tekkinud jääk r on kordarv, siis avaldub see kujul $r = a \cdot b$, kus vähemalt üks täisarvudest a ja b on kuuest väiksem. Et arv 30 jagub kõigi kuuest väiksemate algarvudega (s.t. arvudega 2, 3 ja 5), siis nii $30 \cdot q$ kui ka r jaguvad ühega neist arvudest, kuid siis jagub ka arv p selle arvuga ega saa olla algarv.

5. *Vastus*: On võimalik parajasti siis, kui n ja m on mõlemad paaritud arvud.

   Värvime mängulaua ruudud malekorras mustaks ja valgeks. On selge, et siis peavad üht värvi ruutudel asuma paaritud ja teist värvi ruutudel paarisarvud. Kui ruute on võimalik nummerdada vastavalt iga lapse soovile, siis peavad mängulaua kolm (ning järelikult ka kõik neli) nurgaruutu olema üht ja sama värvi, s.t. m ja n peavad mõlemad olema paaritud arvud.

   Paaritute arvude m ja n korral on võimalik nummerdada ruudud iga lapse soovi kohaselt näiteks nii, nagu näidatud joonisel 2.

X klass

1. *Vastus*: $x = 19a$, $y = 96(1-a)$, kus $a \neq 0, 1$.

   Et ilmselt $x, y \neq 0$, siis võrdus $\dfrac{19}{x} + \dfrac{96}{y} = \dfrac{19}{x} \cdot \dfrac{96}{y}$ on samaväärne võrdusega $19y + 96x = 19 \cdot 96$. Kuna arvud 19 ja 96 on ühistegurita, siis peab arv x jaguma 19-ga ning arv y jaguma 96-ga. Tehes asendused $x = 19x'$ ja $y = 96y'$ (kus x' ja y' on mingid täisarvud), saame $19 \cdot 96y' + 19 \cdot 96x' = 19 \cdot 96$, kust $x' + y' = 1$. Võttes $x' = a$, leiame $x = 19a$, $y = 96(1-a)$, kus täisarv a peab rahuldama tingimust $a \neq 0, 1$ (kuna x ega y ei tohi võrduda nulliga).

2. *Vastus*: Esimene arv on suurem.

   Tähistame $x = 1996$, siis tuleb tõestada võrratus

$$\frac{x^{x-1}+1}{x^x+1} > \frac{x^x+1}{x^{x+1}+1} .$$

   See võrratus on samaväärne igaühega järgmistest võrratustest:

$$\begin{aligned}
(x^{x-1}+1)(x^{x+1}+1) &> (x^x+1)^2 ; \\
x^{2x} + x^{x+1} + x^{x-1} + 1 &> x^{2x} + 2x^x + 1 ; \\
x^{x+1} - 2x^x + x^{x-1} &> 0 ; \\
x^{x-1}(x^2 - 2x + 1) &> 0 ; \\
x^{x-1}(x-1)^2 &> 0 .
\end{aligned}$$

   Viimane neist võrratustest kehtib aga ilmselt iga $x > 1$ korral.

3. *Vastus*: Kahe kaalumisega.

Jagame mündikuhjad algul 1000 hulgaks, igaühes 1000 kuhja. Esimesel kaalumisel paneme kaalule esimese hulga igast kuhjast 1 mündi, teise hulga igast kuhjast 2 münti, jne. Kui nüüd kaal näitab k grammi vähem kui juhul, kui kõik mündid oleksid ehtsad, on võltsmündid mingis k. hulka kuuluvas kuhjas. Selle hulga kuhjadest paneme teisel kaalumisel kaalule vastavalt $1, 2, \ldots, 1000$ münti. Nii saame kindlaks määrata kuhja, milles on võltsmündid.

Vähem kui kahe kaalumisega ei ole võimalik võltsmüntide kuhja kindlaks teha: kuna igas kuhjas on 1996 münti ning kuhje on $1\,000\,000$, siis peab leiduma kaks kuhja, millest esimesel kaalumisel asetame kaalule ühepalju münte. Kui nüüd aga võltsmündid on ühes neist kahest kuhjast, pole meil mingil viisil võimalik leida vajalikku kuhja ilma lisakaalumiseta.

4. *Vastus*: Ühisosa pindala on $\dfrac{1}{6}$.

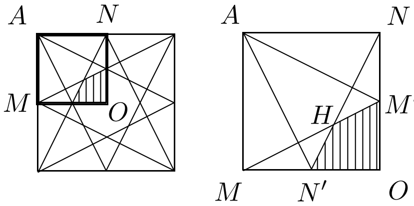
Leiame algul neljandiku otsitavast pindalast, nagu näidatud joonisel 3. Lõigud MM' ja NN' on kolmnurga OMN mediaanideks, seega nende lõikepunkti H kaugus lõigust OM on võrdne ühe kolmandikuga lõigu ON pikkusest. Kujundi $N'HM'O$ pindala on

$$S_{N'HM'O} = S_{MM'O} - S_{MHN'} = \\ = \frac{\frac{|ON|}{2} \cdot |OM|}{2} - \frac{\frac{|ON|}{3} \cdot \frac{|OM|}{2}}{2} = \frac{|ON| \cdot |OM|}{6} ,$$

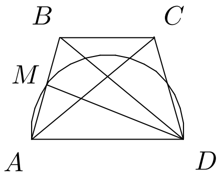
mis moodustab kuuendiku ruudu $OMAN$ pindalast. Järelikult moodustab kolmnurkade ühisosa pindala kuuendiku ruudu $ABCD$ pindalast, mis on 1.

5. *Vastus*: Jah, Mari võib valida arvud $m = 5$, $n = 6$.

Kui Jüri otsuse kohaselt loetakse viimase käigu tegija mängu võitjaks, võib Mari võtta esimesel käigul laualt 5 kompvekki. Nüüd on üldse jäänud vaid kaks võimalikku käiku: $k = 1$ ja $k = 0$. Ükskõik kumma käigu kasuks Jüri ka ei otsustaks, saab Mari alati teha teise käigu ja võita. Kui viimase käigu tegija loetakse kaotajaks, võib Mari võtta alguses laualt 3 kompvekki. Pärast seda on olemas kolm võimalikku käiku: $k = 0$, $k = 1$ ja $k = 2$ ning Jüri on igal juhul sunnitud tegema viimase käigu.



Joonis 3



Joonis 4

XI klass

1. Eeldame üldisust kitsendamata, et $x \geqslant y$. Võrratuse mõlemaid pooli arvuga $x^y y^y$ jagades saame esialgsega samaväärse võrratuse $x^{x-y} \geqslant y^{x-y}$, mis omakorda on samaväärne võrratusega $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geqslant 1$. Et aga $x \geqslant y$, siis $\frac{x}{y} \geqslant 1$ ning $x - y \geqslant 0$, mistõttu viimane võrratus ilmselt kehtib.

2. *Vastus*: Trapetsi nurgad on $72°$, $72°$, $108°$ ja $108°$.

   Et trapetsi alused ei saa olla võrdsed, on omavahel võrdsed trapetsi kaks haara ja üks alustest. Vaatleme kahte juhtu (vt. joonist 4):

   1) $|AB| = |BC| = |CD|$. Olgu $\angle BCA = \alpha$. Et kolmnurk ABC on võrdhaarne, siis $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Trapetsi aluste BC ja AD paralleelsuse tõttu $\angle BCA = \angle CAD$ ja $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 2\alpha$. Et $\angle AMD = 90°$ kui diameetrile toetuv piirdenurk ja $|AM| = |MB|$, siis $|AD| = |BD|$, s.t. kolmnurk ADB on võrdhaarne ning seega $\angle ABD = \angle BAD = 2\alpha$. Kuna trapetsi sisenurkade summa on $360°$, saame võrduse $2\alpha + (2\alpha + \alpha) + (2\alpha + \alpha) + 2\alpha = 360°$, $\alpha = 36°$.

   2) $|AB| = |AD| = |CD|$. Olgu $\angle BDA = \alpha$. Sarnaselt eelmisele punktile saame $|AD| = |BD|$, kuid et lisaks $|AB| = |AD|$, siis on kolmnurk ADB võrdkülgne ja $\angle BAD = \angle BDA$. Samal ajal aga trapetsi sümmeetria tõttu $\angle BDA = \angle CAD$, millest $\angle BAD = \angle CAD$, s.t. punktid A, B ja C peaksid asuma ühel sirgel, mis ei ole võimalik.

3. *Vastus*: Nurgaruutudes peavad olema arvud 1993, 1995, 1997 ja 1999.

Ühes reas, veerus või diagonaalil asetsevate arvude summa peab olema $(1992 + 1993 + \ldots + 2000) : 3 = 5988$. Arvu 5988 saab kolme antud arvu summana esitada kaheksal viisil:

$$\begin{aligned}
1992 + 1996 + 2000 &= 5988\,; \\
1992 + 1997 + 1999 &= 5988\,; \\
1993 + 1995 + 2000 &= 5988\,; \\
1993 + 1996 + 1999 &= 5988\,; \\
1993 + 1997 + 1998 &= 5988\,; \\
1994 + 1995 + 1999 &= 5988\,; \\
1994 + 1996 + 1998 &= 5988\,; \\
1995 + 1996 + 1997 &= 5988\,.
\end{aligned}$$

Keskmises ruudus asuv arv peab esinema vähemalt neljas sellises summas, nurgaruutudes asuvad arvud vähemalt kolmes. Ainukesena esineb neljas summas arv 1996, mis seega asub tabeli keskmises ruudus. Kolmes summas esinevad arvud 1993, 1995, 1997 ja 1999.

4. Paneme tähele, et $480 = 15 \cdot 32$, seega on vaja näidata summa $A = 1^n + 2^n + \ldots + 15^n$ jaguvust arvudega 15 ja 32. Kuna arv n on paaritu, siis mistahes arvude a ja b korral kehtib võrdus $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

   a) Jaguvus 32-ga:

$$\begin{aligned}
A &= (1^n + 15^n) + (2^n + 14^n) + \ldots + (7^n + 9^n) + 8^n = \\
&= (1+15)(1^{n-1} - 1^{n-2}\cdot 15 + \ldots - 1\cdot 15^{n-2} + 15^{n-1}) + \\
&\quad + (2+14)(2^{n-1} - 2^{n-2}\cdot 14 + \ldots - 2\cdot 14^{n-2} + 14^{n-1}) + \ldots + \\
&\quad + (7+9)(7^{n-1} - 7^{n-2}\cdot 9 + \ldots - 7\cdot 9^{n-2} + 9^{n-1}) + 8^n = \\
&= 16\cdot (1^{n-1} - 1^{n-2}\cdot 15 + \ldots - 1\cdot 15^{n-2} + 15^{n-1} + \\
&\quad + 2^{n-1} - 2^{n-2}\cdot 14 + \ldots - 2\cdot 14^{n-2} + 14^{n-1} + \ldots + \\
&\quad + 7^{n-1} - 7^{n-2}\cdot 9 + \ldots - 7\cdot 9^{n-2} + 9^{n-1} + 4\cdot 8^{n-2})\,.
\end{aligned}$$

Viimane sulgavaldis sisaldab $4n$ paarituarvulist liidetavat. Järelikult on selle väärtus paarisarv ning $A = 1^n + 2^n + \ldots + 15^n$ jagub arvuga 32.

b) Jaguvus 15-ga:

$$\begin{aligned}
A &= (1^n+14^n)+(2^n+13^n)+\ldots+(7^n+8^n)+15^n = \\
&= (1+14)(1^{n-1}-1^{n-2}\cdot 14+\ldots-1\cdot 14^{n-2}+14^{n-1})+ \\
&\quad +(2+13)(2^{n-1}-2^{n-2}\cdot 13+\ldots-2\cdot 13^{n-2}+13^{n-1})+\ldots+ \\
&\quad +(7+8)(7^{n-1}-7^{n-2}\cdot 8+\ldots-7\cdot 8^{n-2}+8^{n-1})+15^n = \\
&= 15(1^{n-1}-1^{n-2}\cdot 14+\ldots-1\cdot 14^{n-2}+14^{n-1}+ \\
&\quad +2^{n-1}-2^{n-2}\cdot 13+\ldots-2\cdot 13^{n-2}+13^{n-1}+\ldots+ \\
&\quad +7^{n-1}-7^{n-2}\cdot 8+\ldots-7\cdot 8^{n-2}+8^{n-1}+15^{n-1}),
\end{aligned}$$

seega $A = 1^n+2^n+\ldots+15^n$ jagub arvuga 15.

Märkus: Ülaltoodud lahenduskäik on õige ka $n=3$ korral.

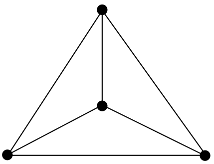
5. *Vastus*: Arvu n suurim võimalik väärtus on 4.

Olgu tasandile nõutud viisil paigutatud n kolmnurka. Erinevaid kolmnurgakolmikuid on siis $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ning kuna ükski tipp pole ühine rohkem kui kolmele kolmnurgale, siis leidub C_n^3 erinevat punkti, millest igaüks on täpselt kolme antud kolmnurga tipuks. Teiselt poolt on aga n kolmnurgal kokku $3n$ tippu, seega ei saa ülalmainitud omadusega punkte olla rohkem kui $\dfrac{3n}{3}=n$. Saame võrratuse $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \leqslant n$, kust $n \leqslant 4$. Neli kolmnurka on võimalik paigutada tasandile näiteks nii, nagu näidatud joonisel 5.

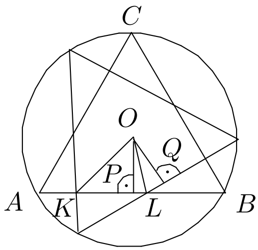
XII klass

1. *Vastus*: $x=p(p-1)$, $y=p-1$.

Et $x, y>0$, siis $x-y<x$ ning võrduse $p(x-y)=xy$ tõttu $p>y$. Et p on algarv ja arv y ei jagu arvuga p, siis peab arv x jaguma arvuga p. Olgu $x=p\cdot x'$, siis $p(px'-y)=px'y$, kust $px'-y=x'y$ ja $y(x'+1)=px'$. Et arv y ei jagu arvuga p, siis peab arv $x'+1$ jaguma arvuga p, s.t. $x'+1=kp$ ja $x'=kp-1$, kus k on mingi positiivne täisarv. Saame $ykp=p(kp-1)$, kust $yk=kp-1$ ja $1=kp-ky=k(p-y)$. Seega $k=1$ ning $y=p-1$ ja $x=p(p-1)$.



Joonis 5



Joonis 6

2. *Vastus*: Avaldisel on vähim väärtus, kui $x = 1$.

Lahendus 1: Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust:

$$\overbrace{x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}^{\text{2000 liidetavat}} \geqslant$$

$$\geqslant 2000 \sqrt[2000]{x^{1000} \cdot x^{900} \cdot x^{90} \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x^{1996}}} = 2000 \,.$$

Võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui kõik arvud on võrdsed, s.t. juhul, kui $x = 1$.

Lahendus 2: Leiame funktsiooni $f(x) = x^k + \dfrac{k}{x}$ miinimumkoha, kui $x > 0$. Selleks leiame selle funktsiooni esimese ja teise tuletise:

$$f'(x) = kx^{k-1} - \frac{k}{x^2} = k\Big(x^{k-1} - \frac{1}{x^2}\Big)$$

ning

$$f''(x) = k(k-1)x^{k-2} + \frac{2k}{x^3} \,.$$

Võrdus $f'(x) = 0$ kehtib parajasti siis, kui $x^{k-1} = \dfrac{1}{x^2}$, s.t. kui $x = 1$. Kuna $f''(1) = k^2 - k + 2k = k^2 + k > 0$, siis on tõepoolest tegemist miinimumkohaga. Kuna

$$x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1996}{x} =$$
$$= \left(x^{1000} + \frac{1000}{x}\right) + \left(x^{900} + \frac{900}{x}\right) + \left(x^{90} + \frac{90}{x}\right) + \left(x^6 + \frac{6}{x}\right),$$

siis selle avaldise miinimumkohaks on samuti $x = 1$ ning miinimumväärtus on 2000.

3. *Vastus*: Kolmnurkade ühise osa pindala on $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

   Olgu O kolmnurkade ühine keskpunkt ning K ja L esialgse kolmnurga ABC külje AB lõikepunktid pööramisel saadud kolmnurga külgedega (vt. joonist 6). Tõmbame punktist O ristlõigud OP ja OQ vastavalt esialgse kolmnurga küljele AB ja sellest pööramise teel saadud kolmnurga vastavale küljele. Ilmselt $\angle POQ = 30°$ ning vaadeldavad kolmnurgad on teineteisest saadavad peegeldamisel sirge OL suhtes, seega $\angle POL = \angle QOL = 15°$. Et kolmnurkade ühine osa koosneb kuuest võrdsest kolmnurgast, millest üks on kolmnurk KOL, siis $\angle KOL = 60°$ ja $\angle KOP = 45°$. Seega otsitav pindala S on

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot |OK| \cdot |OL| \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}2 \cdot \frac{|OP|}{\cos 45°} \cdot \frac{|OP|}{\cos 15°} .$$

   Et võrdkülgse kolmnurga kõrgused on ühtlasi selle mediaanideks, siis $|OP| = \frac{1}{3} \cdot |CP| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ning

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2\cos 45° \cdot \cos 15°} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cos 60° + \cos 30°} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{3-\sqrt{3}}{4} .$$

4. Kolme viimase numbri jaoks arvu kümnendesituses on kokku 1000 erinevat võimalust. Seega peab arvude $p^1, p^2, \ldots, p^{1001}$ hulgas leiduma kaks sellist, mille kümnendesituse viimased numbrikolmikud langevad kokku — olgu need arvud p^k ja p^l. Siis vahe $p^k - p^l$ jagub arvuga 1000.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $k > l$, siis $p^k - p^l = 1000s$, ehk $p^l(p^{k-l} - 1) = 1000s$. Et viiest suuremal algarvul pole ühiseid tegureid arvuga 1000, peab sellega jaguma teine tegur, s.t. $p^{k-l} - 1 = 1000t$ ning järelikult arvu p^{k-l} kolm viimast numbrit on 001.

5. *Vastus*: Arvu n suurim võimalik väärtus on 7.

   Paiknegu ruumis nõutud viisil n tetraeedrit. Fikseerime ühe neist — sel tetraeedril peab olema igaühega ülejäänud tetraeedritest üks ühine serv, kusjuures erinevate tetraeedritega ühised servad on erinevad. Kuna tetraeedril on 6 serva, võib nõutud viisil ruumis paikneda mitte rohkem kui $1 + 6 = 7$ tetraeedrit. Olgu nüüd ruumis antud seitse punkti A, B, C, D, E, F ja G, millest ükski neli ei asu ühel tasandil, siis nõutavate omadustega tetraeedrid on $ABCD$, $ABEF$, $ACEG$, $ADFG$, $BCFG$, $BDEG$ ja $CDEF$.