# Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 1996. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Kalamees sõudis paadiga mööda jõge vastuvoolu, kui puuoks viis tema paadininas oleva mütsi vette. Kalamees märkas mütsi kadumist pool tundi hiljem, pöördus kohe ümber ja sõudis mütsile järele. Leia jõe voolu kiirus, kui kalamees jõudis mütsile järele $a$ km kaugusel kohast, kus müts vette kukkus (jõe voolu kiirus ja paadi kiirus vee suhtes loe konstantseteks).

2. Kas leidub niisugune positiivne täisarv, mille viimane number ei ole null ning mis numbrite järjekorra vastupidiseks muutmisel suureneb täpselt kaks korda?

3. Nelinurga $ABCD$ tipud asuvad ühel ringjoonel. Selle nelinurga diagonaalid poolitavad tippude $A$ ja $B$ juures asuvad nelinurga nurgad ning jaotavad tippude $C$ ja $D$ juures olevad nurgad suhtes $1:2$. Leia nelinurga $ABCD$ nurkade suurused.

4. Kas algarvu $p > 30$ jagamisel arvuga 30 tekkiv jääk võib olla kordarv?

5. Kolm last otsustasid teha endile lauamängu, nummerdades $m \times n$ ruudust koosneva mängulaua ruudud arvudega 1 kuni $mn$ nii, et ruudud numbritega 1 ja $mn$ oleksid mängulaua nurkades ning igal kahel järjestikuste numbritega ruudul oleks ühine külg. Mängu algusruudu (numbriga $1$) asukohas suutsid lapsed kokku leppida, lõppruutu (numbriga $mn$) aga tahtis igaüks neist paigutada mängulaua erinevasse nurgaruutu. Milliste arvude $m$ ja $n$ korral on võimalik iga lapse tahtmist mööda toimida?

# Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 1996. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised täisarvude paarid $(x, y)$, et murdude $\dfrac{19}{x}$ ja $\dfrac{96}{y}$ summa oleks võrdne nende murdude korrutisega.

2. Kumb arv on suurem, kas $\dfrac{1996^{1995}+1}{1996^{1996}+1}$ või $\dfrac{1996^{1996}+1}{1996^{1997}+1}$?

3. 1 000 000 mündikuhjas on igaühes 1996 münti, kusjuures ühes kuhjas on ainult võltsmündid ja kõikides ülejäänud kuhjades ainult ehtsad mündid. Millise vähima arvu kaalumistega saab kindlaks teha võltsmünte sisaldava kuhja, kui kasutadaolev ühe kaalukausiga kaal näitab sellele asetatud kuitahes suurt raskust ühe grammi täpsusega ning on teada, et iga võltsmünt kaalub 9 grammi ja iga ehtne münt 10 grammi?

4. Olgu ruudu $ABCD$ külgede $CD$, $DA$, $AB$ ja $BC$ keskpunktid vastavalt $K$, $L$, $M$ ja $N$. Leia kolmnurkade $AKB$, $BLC$, $CMD$ ja $DNA$ ühise osa pindala, kui ruudu $ABCD$ küljepikkus on $1$.

5. Jüri ja Mari tahavad mängida järgmist mängu. Algul valitakse täisarvud $n > m \geqslant 0$ ja asetatakse tühjale lauale $n$ kompvekki. Seejärel asuvad mängijad kordamööda käike tegema. Iga käik seisneb mittenegatiivse täisarvu $k \leqslant m$ valimises ning laualt $k$ kompveki äravõtmises (valiku $k = 0$ puhul ei tehta midagi). Seejuures ei tohi ühelgi käigul valitud arv $k$ kokku langeda ühe või teise mängija poolt mõnel varasemal käigul valitud arvuga ega ületada kompvekkide arvu laual. Mäng lõpeb, kui üks mängijatest ei saa enam käiku teha.

   Jüri ja Mari otsustasid, et algul valib Mari arvud $n$ ja $m$, seejärel määrab Jüri, kas viimase käigu tegija lugeda mängu võitjaks või kaotajaks, ning Mari teeb esimese käigu. Kas Mari saab valida arvud $n$ ja $m$ nii, et tal on sõltumata Jüri otsusest võimalik mäng võita?

# Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 1996. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude $x$ ja $y$ korral kehtib võrratus $x^x y^y \geqslant x^y y^x$.

2. Trapetsi kolm külge on võrdsed ning ringjoon, mille diameetriks on trapetsi pikem alus, läbib selle haarade keskpunkte. Leia trapetsi nurkade suurused.

3. Arvud $1992, 1993, 1994, \ldots, 2000$ paigutatakse $3 \times 3$ ruudust koosnevasse tabelisse nii, et tekib "maagiline ruut" (s.t. iga arv esineb parajasti ühes tabeli ruudus ning tabeli igas reas, igas veerus ja mõlemal diagonaalil asetsevate arvude summad on võrdsed). Tõesta, et tabeli keskmises ruudus on arv $1996$. Millised arvud võivad olla tabeli nurgaruutudes?

4. Tõesta, et arv $1^n + 2^n + \ldots + 15^n$ jagub arvuga $480$ mistahes paaritu arvu $n \geqslant 5$ korral.

5. Tasandile on paigutatud $n$ kolmnurka nii, et mistahes kolmel neist kolmnurkadest leidub ühine tipp ja ühelgi neljal neist kolmnurkadest ei leidu ühist tippu. Leia arvu $n$ suurim võimalik väärtus.

# Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 1996. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Olgu $p$ fikseeritud algarv. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid $(x, y)$, mis rahuldavad võrrandit $p(x - y) = xy$.

2. Milliste positiivsete reaalarvude $x$ korral on avaldisel

$$x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1996}{x}$$

vähim väärtus?

3. Võrdkülgset kolmnurka pööratakse ümber selle keskpunkti $30^\circ$ võrra. Leia esialgse ja pöördel saadud kolmnurga ühise osa pindala, kui kolmnurga küljepikkus on $1$.

4. Tõesta, et mistahes algarvu $p > 5$ korral leidub selline positiivne täisarv $n$, et arvu $p^n$ kümnendesituse kolm viimast numbrit on $001$.

5. Ruumi on paigutatud $n$ (mitte tingimata korrapärast) tetraeedrit nii, et mistahes kahel neist tetraeedritest leidub kaks ühist tippu ja ühelgi kolmel neist tetraeedritest ei leidu kaht ühist tippu. Leia arvu $n$ suurim võimalik väärtus.