XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 31 марта 1995 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы настолько ленивы, что вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие по крайней мере в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовали 10% всех явившихся и участвующих на соревновании по подсказке было в полтора раза больше чем на соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.

2. Найти все целые числа n, для которых $4n^2 + 16n - 65$ есть простое число.

3. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбирается точка E так, что $|BE| : |EC| = 1 : 2$. Найти отношение $|DF| : |FB|$, где F есть точка пересечения отрезка AE с диагональю BD параллелограмма.

4. Известно, что квадратное уравнение $bx^2 - (a - 3b)x + b = 0$ имеет единственное вещественное решение. Доказать, что уравнение $x^2 + (a - b)x + (ab - b^2 + 1) = 0$ не имеет вещественных решений.

5. Участники вечеринки сидят за круглым столом, причем имеется одинаковое число тех, чей сосед справа того же с ним (ней) пола, и тех, чей сосед справа противоположного с ним (ней) пола. Доказать, что число сидящих за столом делится на четыре.

XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 31 марта 1995 г.

X класс

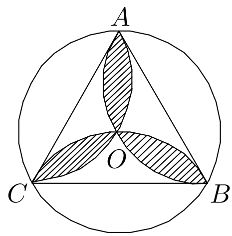
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что для любого вещественного числа $x \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\sqrt{15}(4+\sqrt{7x}) \leqslant 9\sqrt{4+5x}\,.$$

Найти все значения x, при которых имеет место равенство.

2. Три окружности одинакового радиуса пересекаются в вершинах равностороннего треугольника ABC и в его центре O (см. рисунок). Найти площадь незаштрихованной части круга, ограниченного окружностью, описанного около треугольника ABC, если $|OA| = 1$.



3. Доказать, что если m и n — натуральные числа и число $mn+1$ делится на 24, то число $m+n$ также делится на 24.

4. Доказать, что при произвольном натуральном числе $n \geqslant 4$ любой треугольник может быть разбит на n равнобедренных треугольников.

5. Каждый ученик десятого класса рассылает на пасху поздравительные открытки пятнадцати своим одноклассникам. Доказать, что:
   а) если в классе 30 учеников, то обязательно найдутся два ученика, которые пошлют открытки друг другу;
   б) если в классе 31 ученик, то можно открытки разослать таким образом, что никакие два ученика не пошлют открыток друг другу.

XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 31 марта 1995 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На стороне OA угла $\angle AOB = 30^\circ$ выбирается точка X_1 так, что $|OX_1| = 1$. Из точки X_1 на сторону OB опускается перпендикуляр X_1X_2, из его конца X_2 в свою очередь опускается перпендикуляр X_2X_3 на сторону OA, из точки X_3 снова перпендикуляр X_3X_4 на сторону OB, и т.д. Найти сумму длин отрезков X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, $\ldots$.

2. Найти все такие многочлены $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ с вещественными коэффициентами, для которых имеет место тождество $P(x) - P'(x) = x^2$ (где $P'(x)$ — производная многочлена $P(x)$).

3. Пользуясь рисунком 1 доказать, что $\tan 30^\circ = \dfrac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ}$.

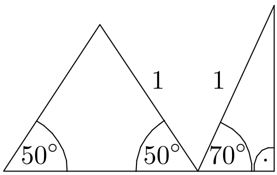


Рис. 1

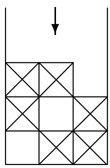


Рис. 2

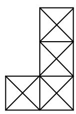


Рис. 3

4. Пусть $a_0 = 2$, $b_0 = 3^{a_0}$ и $a_k = 2^{b_{k-1}}$, $b_k = 3^{a_k}$ при $k \geqslant 1$. Доказать, что при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ число $13^{a_k} + 23^{b_k}$ делится на 24.

5. Игра ТЕТРИС играют по следующим правилам:
   - в начале игры в “колодце” шириной в три клетки расположены фигуры, показанные на рисунке 2;
   - затем в “колодец” по одной начинают падать только фигуры, изображенные на рисунке 3, при этом каждую фигуру во время ее падения разрешается поворачивать и сдвигать, но не отражать;
   - когда в “колодце” заполняется один или несколько горизонтальных рядов, то все такие ряды удаляются перед падением следующей фигуры.

   Найти наименьшее число фигур, после падения которых “колодец” может стать пустым.

XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 31 марта 1995 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить сумму $1 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{4} + 3 \cdot \dfrac{1}{8} + \ldots + n \cdot \dfrac{1}{2^n} + \ldots$.

2. Доказать, что:
   а) ни одно простое число нельзя представить в виде суммы двух или более последовательных нечетных натуральных чисел;
   б) квадрат любого простого числа представим в виде суммы двух или более последовательных нечетных натуральных чисел единственным образом.

3. Пусть D — середина стороны BC треугольника ABC и E — точка пересечения биссектрицы угла $\angle CAB$ со стороной BC, причем $E \neq D$. Окружность, проходящая через точки A, E, D, пересекает сторону AB в ее внутренней точке F. На прямой, определенной стороной AB, выбирается точка G $(G \neq B)$ так, что $|BF| = |FG|$. Доказать, что треугольники EBG и ABC подобны.

4. Функция $f(x)$ с производным $f'(x)$ удовлетворяет следующим условиям:
   а) $f(x) + x \cdot f'(x) = 2$ при любом вещественном $x > 0$;
   б) $f(2) = 1$.

   Доказать, что при любом $x > 0$ имеет место неравенство $f(x) < 2$.

5. На бесконечном клетчатом листе Яак и Юри играют в следующую игру:
   - у Яака имеется n красных фишек, а у Юри — одна синяя фишка. которые в начале игры расположены в разных клетках игрового поля;
   - ход Яака состоит в перемещении одной красной фишки на три клетки (не обязательно по прямой), причем с некоторой клетки разрешается двигаться только на произвольную клетку, имеющую с ней общую сторону;
   - ход Юри состоит в перемещении синей фишки на одну клетку таким же образом;
   - игра начинается ходом Яака и завершается, когда *после хода Яака* какая-либо красная фишка оказывается на одной клетке с синей.

   Найти наименьшее значение n, при котором Яак имеет возможность завершить игру при любом начальном расположении фишек.