Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 31. märtsil 1995. a.

Lahendused ja vastused

IX klass.

1. *Vastus:* 200.

   Osalegu etteütlemisvõistlusel n protsenti ja mahakirjutamisvõistlusel m protsenti kohaletulnutest, siis arvud n ja m rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} n = \frac{3}{2}m \\ n + m - 10 = 100 \end{cases},$$

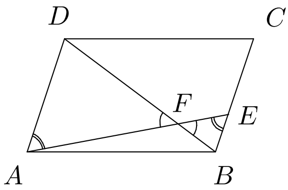
   kust leiame $n = 66$ ja $m = 44$. Olgu kohaletulnute arv N, siis $\frac{66}{100}N = \frac{33N}{50}$ ja $\frac{44}{100}N = \frac{11N}{25}$ peavad olema täisarvud. Seega on N vähim võimalik väärtus 50 ja vähim võimalik õpilaste koguarv loodrite koolis järelikult $4 \cdot 50 = 200$.

2. *Vastus:* 3 ja -7.

   Et arv $4n^2 + 16n - 65 = (2n + 13)(2n - 5)$ võiks olla algarv, peab olema $2n - 5 = \pm 1$ või $2n + 13 = \pm 1$, s.t. n peab olema üks arvudest 3, 2, -6, -7. Kui $n = 2$ või $n = -6$, saame $4n^2 + 16n - 65 = -17$ (ei ole naturaalarv), juhtudel $n = 3$ ja $n = -7$ aga $4n^2 + 16n - 65 = 19$ (on algarv).

3. *Vastus:* $3 : 1$.

   Et $AD \parallel BC$, siis $\angle FAD = \angle FEB$ (vt. joonist 1). Kuna lisaks sellele ka $\angle DFA = \angle BFE$, siis on kolmnurgad AFD ja EFB sarnased ja $|DF| : |FB| = |DA| : |EB| = |CB| : |EB| = 3 : 1$.



Joonis 1

4. Et ruutvõrrandil $bx^2 - (a-3b)x + b = 0$ on üksainus reaalarvuline lahend, siis $D_1 = (a-3b)^2 - 4b^2 = 0$. Nüüd aga

$$D_2 = (a-b)^2 - 4(ab - b^2 + 1) = D_1 - 4 < 0$$

ning seega võrrandil $x^2 + (a-b)x + (ab - b^2 + 1) = 0$ reaalarvulised lahendid puuduvad.

5. Olgu n nende lauasistujate arv, kelle parempoolne naaber on temaga võrreldes vastassoost. Alustades suvalisest külalisest, teeme kellaosuti liikumisele vastassuunas täisringi ümber laua (s.t. liigume iga lauasistuja juurest tema parempoolse naabri juurde) ning paneme tähele, et meie ees istuja sugu vahetub ringi jooksul parajasti n korral. Kuna me ringi lõppedes jõuame sellesama külalise juurde, kellest alustasime, peab n olema paarisarv ning seega lauasistujate koguarv $N = 2n$ jaguma neljaga.

X klass

1. Et mistahes $x \geqslant 0$ korral on mõlemal pool võrratusmärki olevate avaldiste väärtused positiivsed, siis saame esialgse võrratuse pooli ruutu tõstes sellega samaväärse võrratuse

$$15 \cdot (16 + 8\sqrt{7x} + 7x) \leqslant 81 \cdot (4 + 5x) \ .$$

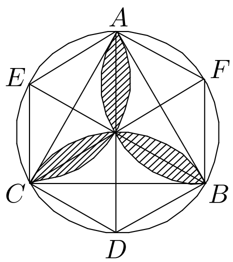
See on aga omakorda samaväärne võrratusega

$$12(5\sqrt{x} - \sqrt{7})^2 \geqslant 0 \ ,$$

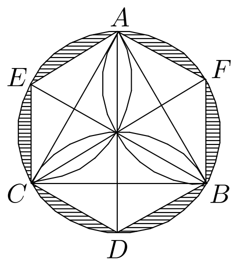
mis on ilmselt tõene iga reaalarvu $x \geqslant 0$ korral. Võrdus kehtib siin (ning järelikult ka esialgses võrratuses) parajasti siis, kui $5\sqrt{x} = \sqrt{7}$, s.t. $x = \dfrac{7}{25}$.

2. *Vastus:* $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

   Olgu D, E ja F vastavalt kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrgustega määratud sirgete lõikepunktid selle kolmnurga ümberringjoonega (vt. joonist 2), siis $AFBDCE$ on ilmselt korrapärane kuusnurk ning D, E ja F on vaadeldava kolme ringjoone keskpunktid. Otsitav pindala S on võrdne selle kuusnurga pindalaga (vt. joonist 3), s.t. $S = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.



Joonis 2

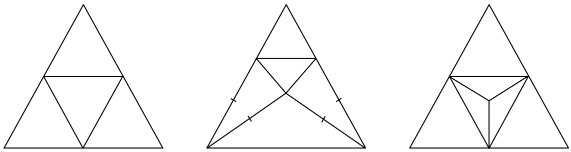


Joonis 3

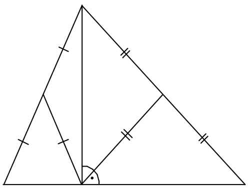
3. Et $(m+1)(n+1) = (mn+1) + (m+n)$, siis piisab tõestada, et ülesandes toodud eeldustel jagub arv $(m+1)(n+1)$ arvuga 24. Paneme nüüd tähele, et kui arv $mn+1$ jagub arvuga 24, siis on arvud m ja n mõlemad paaritud ning kumbki neist ei jagu kolmega. Vähemalt üks arvudest m ja n annab neljaga jagades jäägi 3 (vastasel juhul arv $mn+1 = (4s+1)(4t+1)+1 = 4(4st+s+t)+2$ ei jaguks neljaga) ning üks neist annab kolmega jagades jäägi 2 (vastasel juhul arv $mn+1 = (3s+1)(3t+1)+1 = 3(3st+s+t)+2$ ei jaguks kolmega). Niisiis jagub korrutis $(m+1)(n+1)$ arvudega 8 ja 3 ning seega ka arvuga 24.

4. Vaatleme eraldi kaht juhtu:

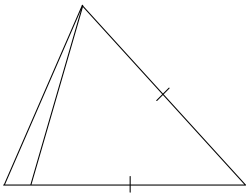
   (a) *Võrdkülgse* kolmnurga saame joonisel 4 näidatud viisil jaotada neljaks, viieks või kuueks võrdhaarseks kolmnurgaks, kusjuures kõikidel juhtudel on vähemalt üks tekkivatest kolmnurkadest jällegi võrdkülgne. Jagades selle võrdkülgse kolmnurga omakorda neljaks, ühe seejuures tekkiva võrdkülgse kolmnurga jälle neljaks, jne., saame esialgse kolmnurga jaotada n võrdhaarseks tükiks mistahes $n \geqslant 4$ korral.



Joonis 4



Joonis 5



Joonis 6

(b) Kui esialgne kolmnurk *ei ole võrdkülgne*, siis $n = 4$ korral jaotame selle neljaks võrdhaarseks kolmnurgaks nii, nagu näidatud joonisel 5, $n \geqslant 5$ korral aga kõigepealt kaheks kolmnurgaks, millest üks on võrdhaarne, nii nagu näidatud joonisel 6. Kui seejuures tekkiv teine kolmnurk ei ole võrdkülgne, saame sellega toimida samuti, jne. Kui mingil sammul teine tekkiv kolmnurk osutub võrdkülgseks, saame jaotuse lõpule viia punktis (a) näidatud viisil.

5. (a) Kui klassis on 30 õpilast, siis on erinevaid õpilaste paare $\dfrac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29$, kaarte aga saadetakse kokku $15 \cdot 30$. Seega leidub kindlasti niisugune õpilaste paar, kes mõlemad saadavad teineteisele õnnitluskaardid.

(b) Paigutame kõik 31 õpilast mõtteliselt ringjoonele ning korraldame õnnitluskaartide saatmise nii, et iga õpilane saadab kaardid temast kellaosuti liikumise suunas 15 järgmisele õpilasele. Sellisel juhul saab iga õpilane õnnitluskaardid parajasti neilt 15-lt klassikaaslaselt, kellele ta ise kaarte ei saada.

XI klass

1. *Vastus:* $2+\sqrt{3}$.

Kuna nurgad $\angle X_1X_2X_3$, $\angle X_2X_3X_4$, ... on kõik võrdsed nurgaga $\angle X_1OX_2 = 30^\circ$ (vt. joonist 7) ja $|OX_1| = 1$, siis

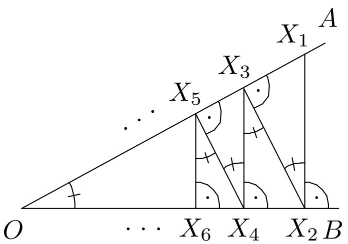
$$|X_1X_2| = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

ning

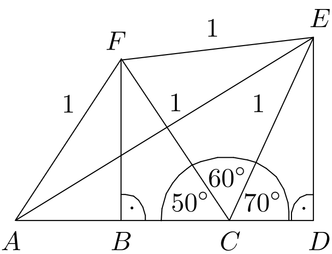
$$\frac{|X_iX_{i+1}|}{|X_{i-1}X_i|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

iga $i = 2, 3, \ldots$ korral. Seega otsitav summa on

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\ldots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2+\sqrt{3}\,.$$



Joonis 7



Joonis 8

2. *Vastus:* $P(x) = x^2+2x+2$.

Olgu a_nx^n muutuja x kõrgeima astmega liige polünoomis $P(x)$, siis $P(x) = a_nx^n + \ldots$ ja $P'(x) = na_nx^{n-1}+\ldots$ (kus kolme punktiga on mõlemal juhul märgitud kõikide madalama x astmega liikmete summa) ning vahe $P(x) - P'(x)$ sisaldab seega liidetavat a_nx^n. Seepärast peab ülesandes antud samasust rahuldav polünoom olema kindlasti kujul $P(x) = x^2 + px + q$. Siis $P'(x) = 2x + p$ ning samasusest $x^2 + px + q - (2x + p) = x^2$ saame $p = q = 2$.

3. Täiendades ülesandes antud joonist ning tähistades sellel esinevad punktid nii, nagu näidatud joonisel 8, saame

$$\angle EFC = \angle FEC = \angle FCE = 60^\circ ,$$

$\angle CED = 20^\circ$ ja $\angle FED = 80^\circ$ ning $\angle AFC = 80^\circ$, $\angle AFE = 140^\circ$ ja $\angle FAE = \angle FEA = 20^\circ$. Seega

$$\angle EAD = \angle FAC - \angle FAE = 30^\circ$$

ning

$$\tan 30^\circ = \frac{|ED|}{|AD|} = \frac{|ED|}{|AB| + |BC| + |CD|} = \frac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ} .$$

4. Ülesande tingimustest järeldub, et mistahes $k = 0, 1, 2, \ldots$ korral on a_k paarisarv ning b_k paaritu arv. Olgu $a_k = 2m_k$ ja $b_k = 2n_k + 1$, siis $13^{a_k} + 23^{b_k} = 169^{m_k} + 23 \cdot 23^{2n_k}$. Et $169 \equiv 1 \pmod{24}$ ja $23 \equiv -1 \pmod{24}$, siis saame

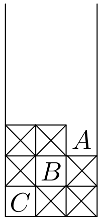
$$13^{a_k} + 23^{b_k} \equiv 1^{m_k} + 23 \cdot (-1)^{2n_k} \equiv 0 \pmod{24} .$$

5. *Vastus:* 6.

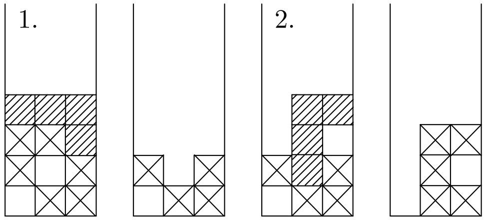
Kui n kujundi langemise järel saab "kaev" tühjaks, siis peavad need n kujundit kokku täitma $3k + 3$ ruutu, kus k on mingi naturaalarv, s.t. $4n = 3k + 3$ ning arv n peab jaguma kolmega.

Teisalt on ilmne, et joonisel 9 märgitud ruute A, B, C on võimalik täita (ning vastavaid ridu kaotada) ainult ühekaupa, mistõttu $n = 3$ korral peab iga langev kujund täitma parajasti ühe neist ruutudest. Et seda esimese kahe kujundi korral saavutada, tuleb need paigutada joonisel 10 näidatud viisil, järelejäävat nelja tühja ruutu ei ole siis aga enam võimalik üheainsa kujundi abil täita.

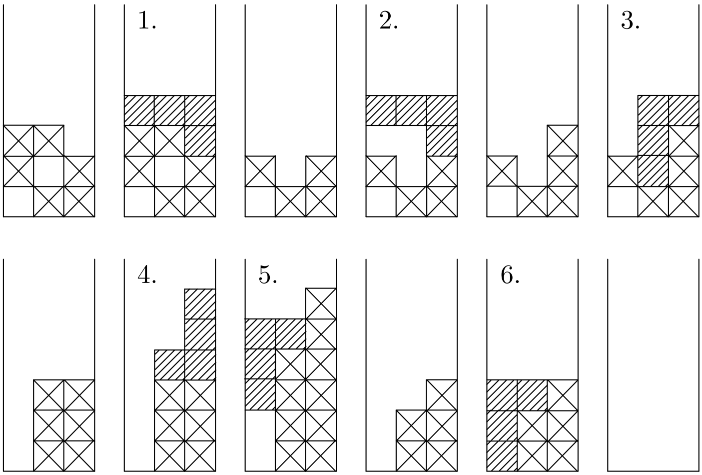
Niisiis ei ole 3 kujundi abil võimalik mängu lõpetada. Kuidas seda teha 6 kujundi abil, on näidatud joonisel 11.



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

XII klass

1. *Vastus:* 2.

   Arvutame:

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots\right)+\ldots=$$

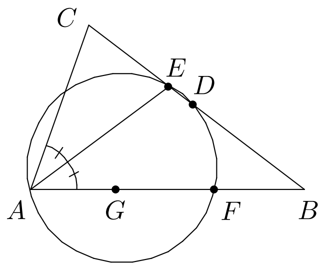
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2\,.$$

2. (a) Olgu naturaalarv N esitatud k järjestikuse paaritu naturaalarvu $2m+1,\ 2m+3,\ \ldots,\ 2m+2k-1$ summana, siis

$$N=k\cdot\frac{(2m+1)+(2m+2k-1)}{2}=k\cdot(2m+k)\,.$$

Seega ei saa $k\geqslant 2$ korral N olla algarv.

(b) Olgu nüüd $N=p^2$, kus p on algarv, siis saame võrdusest $p^2=k\cdot(2m+k)$ ainsa võimalusena $2m+k=k=p$, s.t. $m=0$ ja $p^2=1+3+5+\ldots+(2p-1)$.



Joonis 12

3. Olgu kolmnurga ABC külgede pikkused $|AB|=c$, $|AC|=b$ ja $|BC|=a$. Ühest punktist ringjoonele tõmmatud lõikajate omaduse põhjal saame $|BF|\cdot|BA|=|BD|\cdot|BE|$, s.t.

$$\frac{|BF|}{|BE|}=\frac{|BD|}{|BA|}=\frac{a}{2c}$$

(vt. joonist 12). Kolmnurga nurgapoolitaja omaduse põhjal kehtib võrdus $\dfrac{|CE|}{|AC|} = \dfrac{|BE|}{|AB|}$, mistõttu

$$\frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|CE| + |BE|}{|AC| + |AB|} = \frac{a}{b+c}$$

ning $|CE| = \dfrac{ab}{b+c}$, $|BE| = \dfrac{ac}{b+c}$. Nüüd

$$|BF| = \frac{a}{2c} \cdot |BE| = \frac{a^2}{2(b+c)}$$

ning

$$|BG| = 2|BF| = \frac{a^2}{b+c} .$$

Seega $\dfrac{|BG|}{|BE|} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{|BC|}{|AB|}$, mis näitabki, et kolmnurgad ABC ja EBG on sarnased.

4. Olgu $g(x) = xf(x)$, siis vastavalt ülesande tingimustele kehtib iga $x > 0$ korral võrdus

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) = 2 ,$$

mistõttu $g(x) = 2x + C$. Et $g(2) = 2 \cdot f(2) = 2$, siis $C = -2$ ning

$$f(x) = \frac{2x-2}{x} = 2 - \frac{2}{x} < 2$$

mistahes $x > 0$ korral.

5. *Vastus:* 2.

Värvime mänguvälja ruudud malekorras mustaks ja valgeks ning näitame kõigepealt, et ühest punasest nupust ei piisa. Tõepoolest, nii Jaagu kui ka Jüri iga käigu tulemusena asetub nupp, millega käiakse, esialgsega võrreldes vastasvärvi ruudule. Seega juhul, kui mängu algul on sinine ja punane nupp sama värvi ruutudel, on Jaagu käigu lõppedes nupud alati erinevat värvi (ning järelikult erinevatel) ruutudel.

Olgu nüüd Jaagul kaks punast nuppu, siis võib ta kasutada järgmist taktikat:

a) viia üks punane nupp sellele ruudule, kus sinine nupp oli mängu algul (on lihtne näha, et see on alati võimalik);
b) korrata sellesama nupuga käies täpselt teekonda, mille sinine nupp on läbinud mängu algusest peale (kuna punase nupu üks käik vastab sinise nupu kolmele käigule, jõuab punane nupp seejuures varem või hiljem sinisega samale ruudule või selle naaberruudule);
c) kui punane nupp jõuab mingi käigu järel sinise nupu naaberruudule, teha vahepeal üks käik teise punase nupuga ning seejärel käia esimene punane nupp sinise nupuga samale ruudule.