

Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 31. märtsil 1995. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Loodrite koolis korraldati võistlused mahakirjutamises ja etteütlemises. On teada, et 75% kooli õpilastest ei viitsinud võistlustele tulla, kõik ülejäänud osalesid aga vähemalt ühel võistlusel. Kokkuvõtteid tehes ilmnas, et 10% kohaletulnutest osales mõlemal alal ning etteütlemisvõistlusel oli osavõtjaid poolteist korda rohkem kui mahakirjutamisvõistlusel. Leia vähim võimalik õpilaste arv loodrite koolis.
2. Leia kõik täisarvud n , mille korral $4n^2 + 16n - 65$ on algarv.
3. Rööpküliku $ABCD$ küljel BC võetakse punkt E nii, et $|BE| : |EC| = 1 : 2$. Leia suhe $|DF| : |FB|$, kus F on lõigu AE lõikepunkt rööpküliku diagonaaliga BD .
4. Ruutvõrrandil $bx^2 - (a - 3b)x + b = 0$ on üksainus reaalarvuline lahend. Tõesta, et võrrandil $x^2 + (a - b)x + (ab - b^2 + 1) = 0$ ei ole reaalarvulisi lahendeid.
5. Peokülalised istuvad ümmarguse laua taga, kusjuures neid, kelle parempoolne naaber on temaga samast soost, on samapalju kui neid, kelle parempoolne naaber on vastassoost. Tõesta, et lauasisustajate arv jagub neljaga.

Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 31. märtsil 1995. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

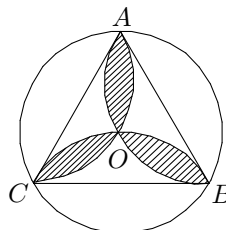
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et mistahes reaalarvu $x \geq 0$ korral kehtib võrratus

$$\sqrt{15}(4 + \sqrt{7x}) \leq 9\sqrt{4 + 5x}.$$

Leia kõik x väärtused, mille korral kehtib võrdus.

2. Kolm võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad võrdkülgse kolmnurga ABC tippudes ning selle keskpunktis O (vt. joonist). Leia kolmnurga ABC ümberringjoonega piiratud ringi viirutamata osa pindala, kui $|OA| = 1$.



3. Tõesta, et kui m ja n on naturaalarvud ning arv $mn + 1$ jagub arvuga 24, siis arv $m + n$ jagub samuti arvuga 24.
4. Tõesta, et mistahes kolmnurka on suvalise naturaalarvu $n \geq 4$ korral võimalik jagada n võrdhaarseks kolmnurgaks.
5. Kümnenda klassi iga õpilane saadab lihavõttepühadeks õnnitluskaardid oma viieteistkümnele klassikaaslasele. Tõesta, et:
 - a) kui klassis on 30 õpilast, siis leiduvad kindlasti kaks õpilast, kes saadavad õnnitluskaardid teineteisele;
 - b) kui klassis on 31 õpilast, siis on võimalik kaardid saata nii, et ükski õpilaste paar ei saada vastastikku teineteisele õnnitluskaarte.

Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 31. märtsil 1995. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Arvuta summa $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$
2. Tõesta, et:
 - a) ühtegi algarvu ei ole võimalik esitada kahe või rohkema järjestikuse paaritu naturaalarvu summana;
 - b) mistahes algarvu ruut esitub kahe või rohkema järjestikuse paaritu naturaalarvu summana ühel ja ainult ühel viisil.
3. Olgu D kolmnurga ABC külje BC keskpunkt ning E nurga $\angle CAB$ poolitaja lõikepunkt küljega BC , kusjuures $E \neq D$. Punkte A , E , D läbiv ringjoon lõikab kolmnurga külje AB selle sisepunktis F . Küljega AB määratud sirgel võetakse punkt G ($G \neq B$) nii, et $|BF| = |FG|$. Tõesta, et kolmnurgad EBG ja ABC on sarnased.
4. Funktsioon $f(x)$ tuletisega $f'(x)$ rahuldab järgmisi tingimusi:
 - a) $f(x) + x \cdot f'(x) = 2$ mistahes reaalarvu $x > 0$ korral;
 - b) $f(2) = 1$.Tõesta, et mistahes $x > 0$ korral kehtib võrratus $f(x) < 2$.
5. Lõpmatul ruudulisel väljal mängivad Jaak ja Jüri järgmist mängu:
 - Jaagul on n punast nuppu ning Jüril üks sinine nupp, mis asuvad mängu algul mänguvälja erinevates ruutudes;
 - Jaagu käik seisneb ühe punase nupu nihutamises kolme ruudu võrra (mitte tingimata otsejoones), kusjuures mingilt ruudult tohib liikuda vaid mistahes sellega ühist külge omavale ruudule;
 - Jüri käik seisneb sinise nupu nihutamises samal viisil ühe ruudu võrra;
 - mäng algab Jaagu käiguga ning lõpeb, kui Jaagu käigu lõppedes asub mõni punane nupp sinise nupuga samal ruudul.

Leia arvu n vähim väärtus, mille korral Jaagul on mistahes algseisu korral võimalus mäng lõpetada.