XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА III ТУР

26 марта 1994 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Два друга, Юри и Яак, по некоторым дням недели говорят только неправду, а по остальным дням недели только правду. Дни "вранья" Юри — понедельник, вторник и среда, у Яака же — четверг, пятница и суббота.

   Однажды, когда мальчики встретились, Юри сказал: "Вчера был один из моих дней вранья," на что Яак ответил: "Вчера и у меня был день вранья." В другой раз при встрече Юри сказал: "Вчера был день, когда я говорил правду," и Яак ответил: "Вчера и я говорил правду."

   а) В какой день недели состоялась первая встреча?

   б) Что можно сказать о времени второй встречи?

2. Найти все такие трехзначные натуральные числа n, при которых $n^2 + 6n - 104$ делится на 113.

3. При последовательном соединении середин сторон выпуклого четырехугольника получается новый выпуклый четырехугольник. Доказать, что площадь получившегося четырехугольника составляет половину площади исходного четырехугольника.

4. Найти все пары целых чисел (a, b), для которых выполняется соотношение $2a^2b = a^3 + b^3$.

5. Занумеруем стороны и диагонали правильного пятиугольника числами 1, 2, ..., 10 и рассмотрим всевозможные треугольники, вершинами которых являются вершины исходного пятиугольника. Возможно ли, что суммы номеров сторон у всех таких треугольников оказываются равными?

XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА III ТУР

26 марта 1994 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Сторона AB правильного треугольника ABC является диаметром окружности, которая пересекает сторону BC в точке M. В точке M к этой окружности проводится касательная, которая пересекает сторону AC в точке P. Доказать, что $AP = 3 \cdot PC$.

2. Найти наименьшее натуральное число, имеющее ровно 100 различных натуральных делителей (включая число 1 и само это число).

3. Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Доказать, что имеют место неравенства:
   а) $2(ab + bc + ac) > a^2 + b^2 + c^2$;
   б) $2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4$.

4. Углы α, β, γ, δ удовлетворяют условиям $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 90^\circ$, $\sin\alpha = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ и $\sin\delta = \dfrac{\tan\beta}{\tan\gamma}$. Доказать, что $\tan\alpha = \dfrac{\tan\delta}{\cos\gamma}$.

5. Три супружеские пары решили вместе поехать за грибами. На вокзал все шестеро прибыли поодиночке, причем каждый прибывающий приветствовал рукопожатием всех ранее прибывших, кроме своего супруга (супруги). В поезде одному из них пришло в голову спросить у всех остальных, какому числу своих спутников каждый из них пожал руку при прибытии на вокзал. На свой вопрос он получил пять различных ответов. Скольким спутникам пожал руку он сам?

XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА III ТУР

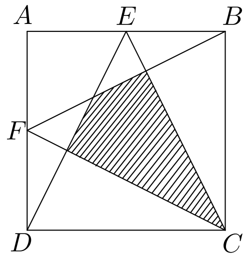
26 марта 1994 г.

XI класс (не выпускники)

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти сумму всех таких пятизначных натуральных чисел, которые не изменятся, если у них порядок цифр изменить на обратный (нуль не является первой цифрой числа).

2. Какой процент площади квадрата на рисунке заштрихован, если $AE = EB$ и $DF = FA$?



3. Доказать, что для любого треугольника имеет место тождество

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\gamma}\ ,$$

где α, β, γ углы этого треугольника, а R и r соответственно радиусы его описанной и вписанной окружностей.

4. Для произвольной последовательности вещественных чисел $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ определим новую последовательность $\Delta A = \{b_1, b_2, \dots\}$ с общим членом вида $b_n = a_{n+1} - a_n$. Найти член a_1 последовательности A, если $a_{19} = a_{94} = 0$ и в последовательности $\Delta(\Delta A)$ все члены равны 1.

5. На плоскости часть точек с целочисленными координатами окрашена в белый цвет, а все остальные — в черный. Доказать, что найдется равнобедренный прямоугольный треугольник такой, что все его вершины имеют целочисленные координаты и окрашены в один цвет.

XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА III ТУР

26 марта 1994 г.

XI, XII класс (выпускники)

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить неравенство: $\log_x(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}$.

2. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбираются соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 ja CC_1 пересекаются в одной точке O и

$$\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} = 1994 .$$

Найти произведение $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1}$.

3. Доказать, что при любом натуральном числе n в конце числа $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ имеется менее чем $\dfrac{n}{4}$ нулей.

4. Все вершины правильного треугольника расположены на сторонах квадрата со стороной 1 (некоторые из них могут совпадать с вершинами квадрата). Найти наибольшее и наименьшее возможные значения площади такого треугольника.

5. Какое наименьшее число точек плоскости нужно отметить, чтобы расстояние от произвольной точки плоскости до хотя бы одной из отмеченных точек было числом иррациональным?