Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

26. märts 1994. a.

Lahendused ja vastused

IX klass.

1. *Vastus:* a) neljapäev; b) teisipäev, kolmapäev, reede või laupäev.

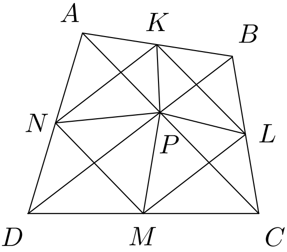
   a) Et poiste "luiskamise päevad" on erinevad, ei saanud nad esimese kohtumise päeval mõlemad valetada ega ka mõlemad tõtt rääkida. Sellel, kes rääkis kohtumisel tõtt, oli eelmine päev olnud "luiskamise päev", tema kaaslasel, kes kohtumisel valetas, aga "tõerääkimise päev". Seega toimus esimene kohtumine neljapäeval, mis ainsana nende tingimustega sobib.

   b) Ka teisel kohtumisel ei saanud mõlemad poisid tõtt rääkida (siis pidanuks neil olema kaks järjestikust ühist "tõerääkimise päeva") ega ka mõlemad valetada. Niisiis rääkis üks poistest nii kohtumise päeval kui ka sellele eelnenud päeval tõtt, teine aga valetas. Selle tingimusega sobivad teisipäev, kolmapäev, reede ja laupäev.

2. *Vastus:* 110, 223, 336, 449, 562, 675, 788 ja 901.

   Arv $n^2+6n-104=(n+3)^2-113$ jagub 113-ga siis ja ainult siis, kui $(n+3)^2$ jagub 113-ga. Et arvu ruut jagub algarvuga 113 siis ja ainult siis, kui sellega jagub vaadeldav arv ise, saame $n=113k-3$, kus k on mingi naturaalarv, s.t.arv n võib olla 110, 223, 336, 449, 562, 675, 788 või 901.

3. Olgu K, L, M, N vastavalt nelinurga külgede AB, BC, CD ja DA keskpunktid ning P diagonaalide AC ja BD lõikepunkt (vt. joonist 1). Siis kolmnurgad ANK ja PNK on pindvõrdsed, kuna neil on ühine alus NK, mis on kolmnurga ABD kesklõiguks, ja seega sellele alusele vastavalt tippudest A ja P tõmmatud kõrgused on võrdsed. Samal põhjusel on pindvõrdsed kolmnurgad BKL ja PKL, CLM ja PLM ning DMN ja PMN.



Joonis 1

4. *Vastus:* paarid (a,a), kus a on mistahes täisarv.

   Kui $a=0$, siis ilmselt $b=0$. Kui $a\neq 0$, siis saame $c=\dfrac{b}{a}$ jaoks tingimuse $2c=1+c^3$. Et $c^3-2c+1=(c-1)(c^2+c-1)$ ja võrrandi $c^2+c-1=0$ lahendid ei ole ratsionaalarvud, siis sobib vaid $c=1$, s.t. $a=b$. Teisalt on ilmne, et mistahes paar (a,a) rahuldab ülesande tingimust.

5. *Vastus:* ei ole võimalik.

   Vaadeldavaid kolmnurki on 10, kusjuures viisnurga iga külg ja iga diagonaal on küljeks täpselt kolmele neist kolmnurkadest. Seega, kui kõikide kolmnurkade külgede numbrite summad oleksid võrdsed, peaks arv $3\cdot(1+2+\ldots+10)=165$ jaguma 10-ga, mis pole tõsi.

X klass.

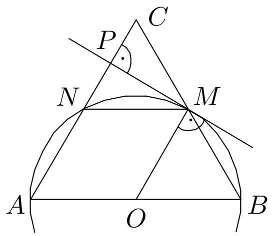
1. Kolmnurk OBM on võrdkülgne, sest $OB=OM$ ja $\angle OBM=60^\circ$ (vt. joonist 2). Ilmselt on võrdkülgne ka kolmnurk CMN, kus N on külje AC lõikepunkt ringjoonega. Et lõigud OM ja MP on risti ja $OM\parallel AC$, siis lõik MP on võrdkülgse kolmnurga CMN kõrguseks. Seega $AC=2\cdot NC=4\cdot PC$ ja $AP=3\cdot PC$.

2. *Vastus:* 11340.

   Esitame naturaalarvu n paarikaupa erinevate algarvude astmete korrutisena: $n=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$. Arvu n iga naturaalarvuline jagaja omab kuju $m = p_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{j_s}$, kus $0 \leqslant j_1 \leqslant k_1, \ldots, 0 \leqslant j_s \leqslant k_s$. Et erinevate astendajate j_i korral saame ilmselt erinevad jagajad m, siis on arvu n naturaalarvuliste jagajate arv võrdne korrutisega $(k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_s+1)$, s.t.meie otsitava arvu n korral peab see korrutis võrduma arvuga 100. Et arv 100 lahutub maksimaalselt nelja arvust 1 suurema naturaalarvu korrutiseks, siis $s \leqslant 4$ ja kõne alla tulevad järgmised variandid:

$$\begin{array}{lllll} n = p_1^{99}, & n = p_1 p_2^{49}, & n = p_1^3 p_2^{24}, & n = p_1^4 p_2^{19}, & n = p_1^9 p_2^9, \\ n = p_1 p_2 p_3^{24}, & n = p_1 p_2^4 p_3^9, & n = p_1^4 p_2^4 p_3^3, & n = p_1 p_2 p_3^4 p_4^4. & \end{array}$$

Ilmselt saavutame igal loetletud juhul vähima n väärtuse, kui valime algarvud p_i võimalikult väikesed ning seejuures väiksemad algarvud nendeks teguriteks p_i, mille astendajad k_i on suuremad. Seda arvestades ja ülaltoodud variante läbi vaadates leiame arvu n vähimaks võimalikuks väärtuseks $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 11340$.



Joonis 2

3. a) Et $a+b > c$, siis $ac+bc > c^2$ ning analoogiliselt $ab+cb > b^2$ ja $ba+ca > a^2$. Ülesandes esitatud võrratuse saame nende kolme võrratuse liitmisel.

   b) Teisendame:

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2 &= (a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2 = \\ &= (a^2-b^2-c^2-2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc) = \\ &= (a^2-(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2) = \\ &= \underbrace{(a-b-c)}_{<0}\underbrace{(a+b+c)}_{>0}\underbrace{(a-b+c)}_{>0}\underbrace{(a+b-c)}_{>0} < 0\,. \end{aligned}$$

4. Teisendame avaldist $\dfrac{\tan\delta}{\cos\gamma}$, kasutades antud seoseid:

$$\frac{\tan\delta}{\cos\gamma}=\frac{\sin\delta}{\cos\delta\cos\gamma}=\frac{\tan\beta}{\cos\delta\cos\gamma\tan\gamma}=\frac{\tan\beta}{\sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\delta}}=$$

$$=\frac{\tan\beta}{\sin\gamma\sqrt{1-\dfrac{\tan^2\beta}{\tan^2\gamma}}}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma\sqrt{\cos^2\beta-\dfrac{\sin^2\beta}{\tan^2\gamma}}}=$$

$$=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\beta\Big(1+\dfrac{1}{\tan^2\gamma}\Big)}}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha\ .$$

5. *Vastus:* 2.

   Olgu A esimene, kes saabus raudteejaama pärast oma abikaasat ja B viimane, kes jõudis sinna enne oma abikaasat. Siis A surus kätt sama paljudel kaaslastel kui vahetult enne teda tulija ning B sama paljudel kui vahetult tema järel tulija. Et vastavalt ülesande tingimustele leidub seltskonnas ülimalt kaks inimest, kes surusid kätt ühepalju kordi, siis saabus A raudteejaama vahetult B järel, s.t.kõigepealt jõudis jaama üks liige (mees või naine) igast abielupaarist ning seejärel saabusid nende abikaasad. Niisiis surusid nii A kui ka B kätt kahel kaaslasel ning küsija pidi olema üks neist.

XI klass.

1. *Vastus:* 49500000.

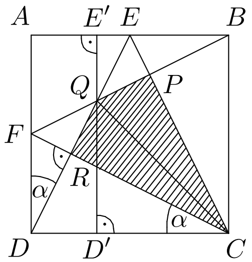
   Otsitav arv S on kõigi selliste arvude summa, mis esituvad kujul $\overline{abcba}=10001a+1010b+100c$, kus a väärtus võib olla $1, 2, \ldots, 9$ ning b ja c väärtused võivad olla $0, 1, \ldots, 9$. Seejuures omandavad a, b ja c nimetatud väärtusi üksteisest sõltumatult. See tähendab, et iga konkreetse a väärtuse korral esineb liidetav $10001a$ summas S 100 korda — niipalju kui on erinevaid võimalusi b ja c valikuks.

Samal põhjusel esineb iga liidetav $1010b$ ja iga liidetav $100c$ summas S 90 korda. Arvestades, et $1+2+\ldots+9=45$, saame

$$\begin{aligned} S &= 100\cdot 10001\cdot 45 + 90\cdot 1010\cdot 45 + 90\cdot 100\cdot 45 = \\ &= 4500\cdot(10001+909+90) = 49500000\,. \end{aligned}$$

2. *Vastus:* $26\frac{2}{3}\,\%$.

Olgu $\angle DCF=\alpha$, siis kolmnurkade DAE ja CDF võrdsusest saame $\angle ADE=\angle DCF=\alpha$ ning seega $\angle DRF=90^\circ$ (vt. joonist 3). Täisnurksed kolmnurgad CRD ja CDF on sarnased, mistõttu $\dfrac{CR}{DR}=\dfrac{CD}{FD}=2$. Olgu ruudu $ABCD$ küljepikkus a ja $DR=x$, siis $CR=2x$, $a=CD=\sqrt{5}\cdot x$ ning kolmnurga CRD pindala on $S_{CRD}=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot 2x=x^2=\dfrac{a^2}{5}$.



Joonis 3

Et lõigud DE ja BF on kolmnurga DAB mediaanideks, siis $DQ=2QE$ ja $D'Q=2QE'$, kus D' ja E' on mediaanide DE ja BF lõikepunkti Q ristprojektsioonid vastavalt ruudu külgedele DC ja AB. Kolmnurga CQD pindala on niisiis $S_{CQD}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{2}{3}a=\dfrac{a^2}{3}$ ja viirutatud nelinurga pindala

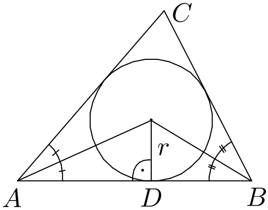
$$S_{CRQP}=2\cdot(S_{CQD}-S_{CRD})=2a^2\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}a^2$$

moodustab $\dfrac{4}{15} \cdot 100 = \dfrac{80}{3} = 26\dfrac{2}{3}$ protsenti ruudu pindalast.

3. Olgu kolmnurgas ABC $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$ ning puutugu selle kolmnurga siseringjoon külge AB punktis D (vt. joonist 4). Siis $\dfrac{AD}{r} = \cot\dfrac{\alpha}{2}$ ja $\dfrac{DB}{r} = \cot\dfrac{\beta}{2}$. Kasutades nüüd siinusteoreemi, saame

$$2R = \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{r\left(\cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\dfrac{\beta}{2}\right)}{\sin\gamma} ,$$

kust $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\gamma}$.



Joonis 4

4. *Vastus:* 837.

Olgu $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $\Delta A = \{b_1, b_2, \ldots\}$, $\Delta(\Delta A) = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Siis

$$b_k = b_{k-1} + 1 = b_{k-2} + 2 = \ldots = b_1 + (k-1)$$

iga $k = 2, 3, \ldots$ korral. Seega

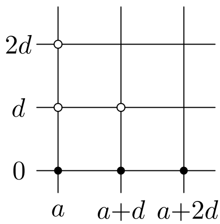
$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b_1 , \\ a_3 &= a_2 + b_2 = a_2 + b_1 + 1 = a_1 + 2b_1 + 1 , \\ a_4 &= a_3 + b_3 = a_3 + b_1 + 2 = a_1 + 3b_1 + (1+2) , \ \ldots . \end{aligned}$$

Näeme, et suvalise $k \geqslant 3$ korral kehtib valem

$$a_k = a_1 + (k-1)b_1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\,,$$

mille saame matemaatilise induktsiooni abil kergesti tõestada. Seega avaldub a_k ruutkolmliikmena $a_k = \frac{1}{2}k^2 + Bk + C$, kus B ja C on mingid arvud. Et vastavalt ülesande tingimustele on arvud 19 ja 94 ruutvõrrandi $\frac{1}{2}k^2+Bk+C=0$ lahenditeks, siis $a_k = \frac{1}{2}(k-19)(k-94)$ ning $a_1 = \frac{1}{2}\cdot(-18)\cdot(-93) = 837$.

5. Oletame kõigepealt, et leiduvad kolm ühevärvilist punkti koordinaatidega $(a,0)$, $(a+d,0)$ ja $(a+2d,0)$, kus a on mingi täisarv ja d on naturaalarv. Kui vähemalt üks punktidest (a,d), $(a,2d)$ ja $(a+d,d)$ on nendega sama värvi, siis on meil ilmselt olemas nõutav kolmnurk; vastasel juhul aga on viimati nimetatud kolm punkti ise sellise kolmnurga tippudeks (vt. joonist 5).



Joonis 5

Vaatleme nüüd juhtu, kus horisontaaljoonel $y=0$ ei leidu kolme võrdsete vahekaugustega ühevärvilist punkti $(a,0)$, $(a+d,0)$ ja $(a+2d,0)$. Olgu n järjestikuste ühevärviliste punktide maksimaalne arv joonel $y=0$ — vastavalt tehtud eeldusele ilmselt $n<3$. Kui $n=1$, siis paiknevad mustad ja valged punktid joonel $y=0$ vaheldumisi, mis on vastuolus meie eeldusega. Kui $n=2$, siis võime üldsust kitsendamata eeldada, et leiduvad kaks punkti $(a+1,0)$ ja $(a+2,0)$, mis on mõlemad mustad. Siis peavad punktid $(a,0)$ ja $(a+3,0)$ olema valged, punkt $(a+6,0)$ must, punkt $(a+4,0)$ valge ja punkt $(a+5,0)$

must. Nüüd ei saa punkt $(a+8,0)$ olla valge (sest valged on punktid $(a,0)$ ja $(a+4,0)$) ega ka must (sest mustad on punktid $(a+2,0)$ ja $(a+5,0)$) — vastuolu.

Niisiis on horisontaaljoonel $y=0$ (tegelikult suvalisel horisontaaljoonel $y=c$) kindlasti kolm võrdsete vahedega paiknevat ühevärvilist punkti ja vastavalt eespool tõestatule on olemas ka nõutavate omadustega kolmnurk.

XII klass.

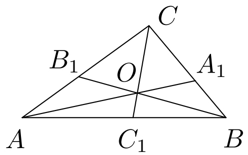
1. *Vastus:* $0 < x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ või $x \geqslant 2$.

Tähistades $y = \log_x 2$ ja kasutades seda, et $\log_x 2x = \log_x 2 + 1$ ja $\log_x 2x^3 = \log_x 2 + 3$, saame uue muutuja y jaoks võrratuse $y+1 \leqslant \sqrt{y+3}$. Selle võrratuse lahenditeks on ilmselt kõik arvud y, mis pole väiksemad arvust -3 ja mille korral kas $y+1 \leqslant 0$ või $(y+1)^2 \leqslant y+3$, s.t.kokkuvõttes $-3 \leqslant y \leqslant 1$. Funktsiooni $y = \log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$ pöördfunktsiooniks on $x = 2^{1/y}$, mille määramispiirkonda kuuluvad kõik nullist erinevad reaalarvud ja mis on oma määramispiirkonna kummaski osas ($y<0$ ja $y>0$ korral) rangelt kahanev, s.t.väiksematele y väärtustele vastavad suuremad x väärtused. Seda arvestades saame tingimusest $-3 \leqslant y < 0$ tingimuse $0 < x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ja tingimusest $0 < y \leqslant 1$ vastavalt tingimuse $2 \leqslant x < \infty$.

2. *Vastus:* 1996.

Et kolmnurkadel AOB ja OA_1B on tipust B tõmmatud kõrgused võrdsed, siis $\dfrac{S_{AOB}}{S_{OA_1B}} = \dfrac{AO}{OA_1}$ (vt. joonist 6). Samuti $\dfrac{S_{AOC}}{S_{OA_1C}} = \dfrac{AO}{OA_1}$ ning seega

$$\frac{S_{AOB}+S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOB}+S_{AOC}}{S_{OA_1B}+S_{OA_1C}} = \frac{AO}{OA_1}\,.$$



Joonis 6

Tähistame $S_{AOB} = x$, $S_{AOC} = y$ ja $S_{BOC} = z$, siis $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{x+y}{z}$; analoogiliselt saame $\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{x+z}{y}$ ja $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{y+z}{x}$. Korrutades saame:

$$\frac{AO}{OA_1}\cdot\frac{BO}{OB_1}\cdot\frac{CO}{OC_1} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz} =$$
$$= \frac{xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+2xyz}{xyz} =$$
$$= \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} + 2 = 1994 + 2 = 1996\,.$$

3. Lahutades korrutise $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ algteguriteks, saame tegurite 2 arvuks $N_2(n) = \left[\dfrac{n}{2}\right] + \left[\dfrac{n}{4}\right] + \left[\dfrac{n}{8}\right] + \ldots$ ja tegurite 5 arvuks $N_5(n) = \left[\dfrac{n}{5}\right] + \left[\dfrac{n}{25}\right] + \left[\dfrac{n}{125}\right] + \ldots$. (siin kirjutis $[x]$ tähistab arvu x täisosa). Et mistahes naturaalarvude n ja k korral ilmselt $\dfrac{n}{2^k} \geqslant \dfrac{n}{5^k}$, siis $N_2(n) \geqslant N_5(n)$ ja arvu $n!$ lõpus on seega

$$N_5(n) < \frac{n}{5} + \frac{n}{25} + \frac{n}{125} + \ldots = \frac{n}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{n}{4}$$

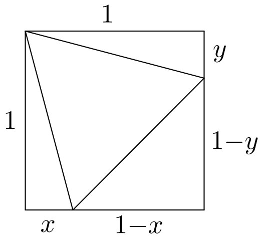
nulli (range võrratus kehtib siin sellepärast, et $\dfrac{n}{5}, \dfrac{n}{25}, \dfrac{n}{125}, \ldots$ ei saa ühegi fikseeritud arvu n korral olla kõik täisarvud).

4. *Vastus:* $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \leqslant S \leqslant 2\sqrt{3} - 3$.

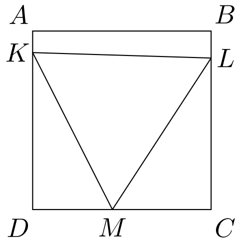
a) Kui kolmnurga üks tipp asub ruudu tipus ja kolmnurga ülejäänud tippude kaugused lähimast ruudu tipust on vastavalt x ja y (vt. joonist 7), siis

$$1 + x^2 = 1 + y^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \ ,$$

kust $x = y$ ja $1 + x^2 = 2 \cdot (1-x)^2$, ehk $x^2 - 4x + 1 = 0$. Selle ruutvõrrandi lahenditeks on arvud $2 \pm \sqrt{3}$; tingimust $0 \leqslant x \leqslant 1$ arvestades saame $x = 2 - \sqrt{3}$ ja $S = 1 - x - \dfrac{(1-x)^2}{2} = 2\sqrt{3} - 3$.



Joonis 7



Joonis 8

b) Kui kolmnurga ükski tipp ei asu ruudu tipus, siis leidub parajasti üks ruudu külg, millel ei asu ühtki kolmnurga tippu. Kolmnurga pindala on ilmselt minimaalne, kui üks tema külg on paralleelne ruudu selle küljega — kolmnurga küljepikkus on siis 1 ja pindala $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Näitame veel, et selle kolmnurga pindala on igal juhul väiksem kui punktis a) vaadeldud juhul. Tõepoolest, olgu AB ruudu külg, mis ei sisalda ühtki kolmnurga tippu ja olgu K, L kolmnurga tipud, mis asuvad vastavalt ruudu külgedel AD ja BC (vt. joonist 8). Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $AK \leqslant BL$. Nihutame kolmnurka paralleelselt küljega AD, kuni kolmnurga tipp K ühtib ruudu tipuga A ning pöörame teda seejärel ümber tipu K, kuni $\angle DAM = \angle BAL$. Saadud kolmnurk on homoteetne punktis a) vaadeldud kolmnurgaga ja ilmselt sellest väiksem.

5. *Vastus:* 3.

Kahest punktist ilmselt ei piisa: olgu d punktide A ja B vaheline kaugus ja r mistahes ratsionaalarv, mis on suurem kui $\dfrac{d}{2}$, siis lõigu

AB keskristsirgel leiduvad kaks punkti, mis on punktidest A ja B kaugusel r.

Valime nüüd punktid $A(0,0)$, $B(1,0)$ ja $C(\sqrt{2},0)$. Siis mistahes punkti $M(x,y)$ kauguste ruudud punktidest A, B, C on vastavalt

$$d^2(M,A) = x^2 + y^2\,,$$

$$d^2(M,B) = (x-1)^2 + y^2$$

ja

$$d^2(M,C) = (x-\sqrt{2})^2 + y^2\ .$$

Kui kõik need kaugused oleksid ratsionaalarvud, siis peaksid ka

$$x = \frac{1}{2}\,(d^2(M,A) - d^2(M,B) + 1)$$

ja

$$\sqrt{2}\cdot x = \frac{1}{2}\,(d^2(M,A) - d^2(M,C) + 2)$$

mõlemad olema ratsionaalarvud — vastuolu.