Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

26. märts 1994. a.

IX klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Kaks sõpra, Jüri ja Jaak, räägivad mõnedel nädalapäevadel ainult valet ja ülejäänud nädalapäevadel ainult tõtt. Jüri "luiskamise päevad" on esmaspäev, teisipäev ja kolmapäev, Jaagul neljapäev, reede ja laupäev.

   Ühel päeval, kui poisid kohtusid, ütles Jüri: "Eile oli üks minu luiskamise päevadest," ning Jaak vastas: "Eile oli ka minul luiskamise päev." Teisel korral taas kokku saades ütles Jüri: "Eile oli minul tõerääkimise päev," ning Jaak vastas: "Eile rääkisin ka mina tõtt."

   a) Millisel nädalapäeval toimus esimene kohtumine?
   b) Mida on võimalik öelda teise kohtumise aja kohta?

2. Leia kõik sellised kolmekohalised naturaalarvud n, mille korral $n^2 + 6n - 104$ jagub arvuga 113.

3. Kumera nelinurga külgede keskpunktide järjestikusel ühendamisel tekib uus kumer nelinurk. Tõesta, et selle nelinurga pindala moodustab poole esialgse nelinurga pindalast.

4. Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral kehtib seos $2a^2b = a^3 + b^3$.

5. Nummerdame korrapärase viisnurga küljed ja diagonaalid arvudega $1, 2, \ldots, 10$ ja vaatleme kõikvõimalikke kolmnurki, mille tippudeks on esialgse viisnurga tipud. Kas on võimalik, et kõigi selliste kolmnurkade külgede numbrite summad osutuvad võrdseks?

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

26. märts 1994. a.

X klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Võrdkülgse kolmnurga ABC külg AB on diameetriks ringjoonele, mis lõikab kolmnurga külge BC punktis M. Punktis M on sellele ringjoonele tõmmatud puutuja, mis lõikab külge AC punktis P. Tõesta, et $AP = 3 \cdot PC$.

2. Leia vähim naturaalarv, millel on täpselt 100 erinevat naturaalarvulist jagajat (arvu jagajateks loeme ka selle arvu enda ja arvu 1).

3. Olgu a, b ja c mingi kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et kehtivad võrratused:
   a) $2(ab + bc + ac) > a^2 + b^2 + c^2$;
   b) $2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4$.

4. Nurgad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rahuldavad tingimusi $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 90^\circ$, $\sin\alpha = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ ja $\sin\delta = \dfrac{\tan\beta}{\tan\gamma}$. Tõesta, et $\tan\alpha = \dfrac{\tan\delta}{\cos\gamma}$.

5. Kolm abielupaari otsustasid koos marjule sõita. Raudteejaama saabusid kõik kuus ühekaupa, kusjuures iga saabuja tervitas kättpidi kõiki varem tulnuid peale oma abikaasa. Rongis tuli kellelgi mõte küsida kõigilt ülejäänutelt, mitmel kaaslasel oli igaüks neist jaama jõudes kätt surunud, ja ta sai viis erinevat vastust. Mitmel kaaslasel surus kätt küsija ise?

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

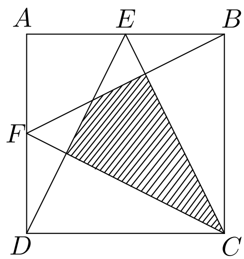
26. märts 1994. a.

XI klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia kõigi selliste viiekohaliste naturaalarvude summa, mis ei muutu, kui nende numbrite järjekord muuta vastupidiseks (arvu esimene number ei ole null).

2. Mitu protsenti ruudu pindalast on joonisel viirutatud, kui $AE = EB$ ja $DF = FA$?



3. Tõesta, et mistahes kolmnurga korral kehtib samasus

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}}{2\sin\gamma} ,$$

kus α, β, γ on selle kolmnurga nurgad ning R ja r vastavalt tema ümber- ja siseringjoone raadiused.

4. Mistahes reaalarvuliste liikmetega jada $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ korral defineerime uue jada $\Delta A = \{b_1, b_2, \dots\}$ üldliikmega $b_n = a_{n+1} - a_n$. Leia jada A liige a_1, kui $a_{19} = a_{94} = 0$ ning jadas $\Delta(\Delta A)$ on kõik liikmed võrdsed arvuga 1.

5. Tasandil on osa täisarvuliste koordinaatidega punkte värvitud valgeks ja kõik ülejäänud mustaks. Tõesta, et leidub võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja ühte värvi.

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

26. märts 1994. a.

XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Lahenda võrratus: $\log_x(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}$.

2. Kolmnurga ABC külgedel BC, AC ja AB valitakse vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis O ning

$$\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} = 1994 .$$

   Leia korrutis $\dfrac{AO}{OA_1} \cdot \dfrac{BO}{OB_1} \cdot \dfrac{CO}{OC_1}$.

3. Tõesta, et mistahes naturaalarvu n korral on arvu $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ lõpus vähem kui $\dfrac{n}{4}$ nulli.

4. Võrdkülgse kolmnurga kõik tipud asuvad ühikruudu külgedel (mõni neist võib kokku langeda ka ruudu tipuga). Leia sellise kolmnurga pindala suurim ja vähim võimalik väärtus.

5. Milline vähim arv punkte tuleb tasandil märgistada, et tasandi mistahes punkti kaugus vähemalt ühest märgistatud punktist oleks irratsionaalarv?