Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

29. märts 1993. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* 1.

   Teisendame vasakpoolset tegurit:

$$\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} = \sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}}} = $$
$$= \sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} =$$
$$= \sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

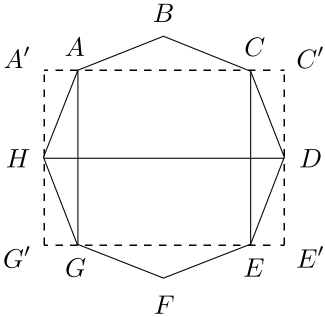
   Kogu avaldise väärtus on seega $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$.

2. Paneme tähele, et $7^4 = 49\cdot 49 = 2401$, seega mistahes naturaalarvu k korral $7^{4k} = 2401^k = 100m+1$, kus m on mingi naturaalarv. Muuhulgas avaldub sellisel kujul ka arv 7^{1992}, mistõttu arv

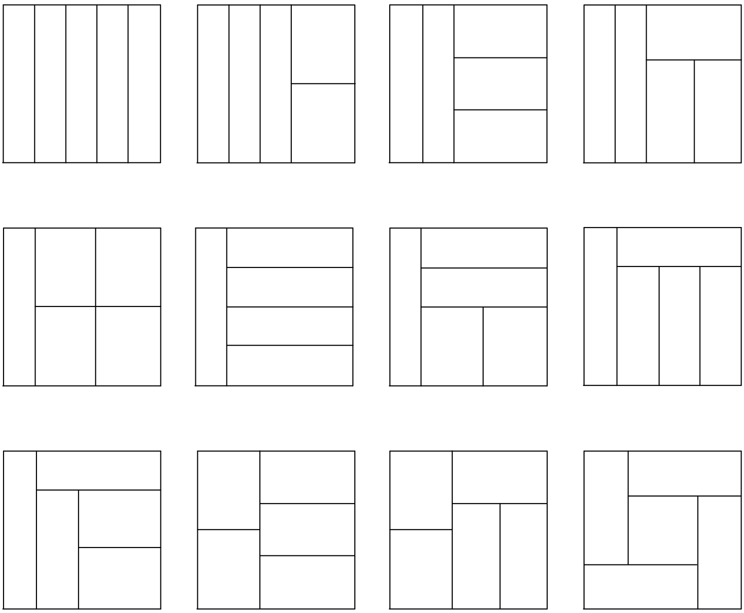
$$\begin{aligned} 7^{1993}+1993 &= 7(100m+1)+1993 = \\ &= 100(7m+19)+7+93 = 100(7m+20) \end{aligned}$$

   jagub arvuga 100.

3. Et kolmnurkade $CC'D$, $EE'D$, $AA'H$ ja $GG'H$ pindalade summa on võrdne kolmnurkade ABC ja EFG pindalade summaga (vt. joonist 1), siis on ristküliku $A'C'E'G'$ pindala võrdne kaheksanurga pindalaga. Selle ristküliku küljed on aga ühepikkused vastavalt kaheksanurga pikima ja lühima diagonaaliga.



Joonis 1



Joonis 2

4. *Vastus:* $\dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Teisendame:

$$
\begin{aligned}
(a-1)&(a-3)(a-4)(a-6)+10= \\
&=(a^2-7a+6)(a^2-7a+12)+10= \\
&=b(b+6)+10=(b+3)^2+1\,,
\end{aligned}
$$

kus $b=a^2-7a+6$. See avaldis saab vähima väärtuse 1 siis, kui $b=-3$, mis vastab a väärtustele $\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$.

5. Lihtne on kontrollida, võttes arutluse aluseks näiteks ruudu vertikaalsete läbilõigete arvu, et (tükkide ümberpaigutamise täpsusega) on võimalikud vaid joonisel 2 näidatud tükeldused.

   Näeme, et vaid ühel juhul on tükkide hulgas ruut, ja see ruut on ainus.

X klass

1. *Vastus:* 193, 393, 3193 ja 9393.

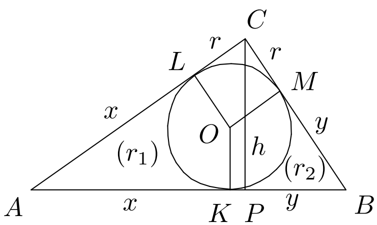
   Olgu pärast numbrite 93 kustutamist saadud arv k ja esialgne arv mk (k ja m on naturaalarvud). Siis $100k+93=mk$, ehk $(m-100)k=93$. Et arvu 93 ainsad naturaalarvulised jagajad on 1, 3, 31 ja 93, siis on sellel võrrandil neli lahendit: $k=1$, $m=193$; $k=3$, $m=131$; $k=31$, $m=103$; $k=93$, $m=101$. Esialgseks arvuks saame vastavalt 193, 393, 3193 või 9393.

2. Teisendame:

$$
\begin{aligned}
x(5x+2)&+y(4x+y)+5=5x^2+2x+4xy+y^2+5= \\
&=(4x^2+4xy+y^2)+(x^2+2x+1)+4= \\
&=(2x+y)^2+(x+1)^2+4>0\,.
\end{aligned}
$$

3. Ülesande tingimuste kohaselt arv $(k^m)^n=(k^n)^m$ jagub arvuga $(n^k)^m=(n^m)^k$ ja see omakorda jagub arvuga $(m^n)^k=(m^k)^n$. Seega jagub arv $(k^m)^n$ arvuga $(m^k)^n$, millest järeldame, et arv k^m jagub arvuga m^k.

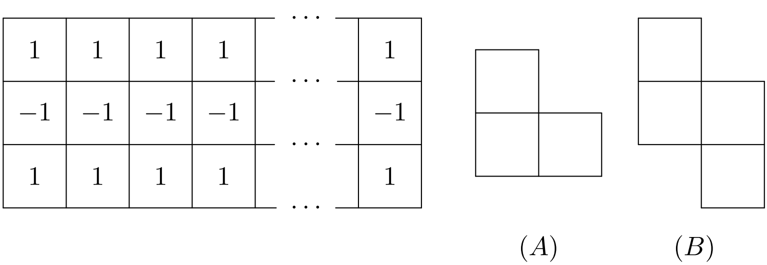
4. Arvutades kolmnurga ABC pindala kahel viisil (hüpotenuusi ja sellele tõmmatud kõrguse kaudu ning nelinurkade $CLOM$, $ALOK$ ja $BMOK$ pindalade summana), saame $h(x+y) = 2(r^2 + xr + yr)$, kust $h = \dfrac{2r(x+y+r)}{x+y}$ (vt. joonist 3). Kolmnurkade APC, CPB ja ACB sarnasuse tõttu kehtivad võrdused $\dfrac{r_1}{x+r} = \dfrac{r_2}{y+r} = \dfrac{r}{x+y}$, ning $r_1 + r_2 + r = \dfrac{r}{x+y}(2x+2y+2r) = h$. Samast võrdest leiame $r_1^2+r_2^2 = \dfrac{r^2}{(x+y)^2}\big((x+r)^2+(y+r)^2\big) = r^2$, kuna vastavalt Pythagorase teoreemile $(x+y)^2 = (x+r)^2 + (y+r)^2$.



Joonis 3

5. *Vastus:* kõik paarisarvud.

Kirjutame ruutudesse arvud nii, nagu joonisel 4 näidatud.



Joonis 4

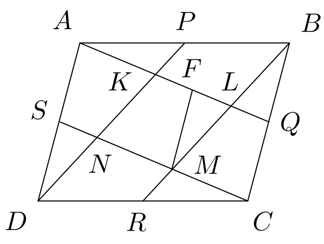
Siis iga kujundi (A) poolt kaetavates ruutudes asuvate arvude summa on 1 või -1; kujundi (B) korral on see summa 0, sõltumata kujundi paigutusest. Et ruutudes olevate arvude kogusumma on n, siis peame kokku kasutama vähemalt n kujundit. See aga tähendab, et kujundeid (B) ei ole üldse võimalik kasutada. On lihtne veenduda (näiteks alustades katmist ruudustiku mingist nurgast), et kujunditega (A) on võimalik ruudustik katta siis ja ainult siis, kui n on paarisarv.

XI klass

1. $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(n^2+n)$. Arv n^2+n lõpeb alati numbriga 0, 2 või 6, numbriga 2, 4, 7 või 9 lõppeva arvu kahekordne aga lõpeb numbriga 4 või 8.

2. *Vastus:* $5:1$.

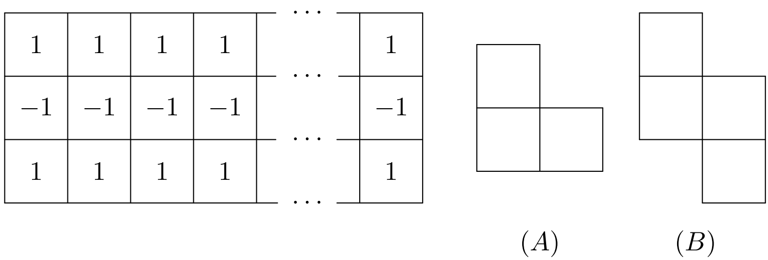
Tõmbame läbi punkti M küljega BC paralleelse sirge — lõikugu see sirgega AQ punktis F (vt. joonist 5). Et $BQ = QC = FM$ ning kolmnurgad BQL ja MFL on sarnased, siis on need kolmnurgad pindvõrdsed. Trapetsid $LQCM$ ja $KFMN$ on võrdsed, kuna nende vastavad küljed on paralleelsed ning $QC = FM$ ja $CM = MN$ (viimane võrdus järeldub sellest, et $CR = RD$ ja $RM \parallel DN$). Seega on kolmnurk CMB (ning sümmeetria tõttu ka kolmnurgad AKD, DNC ja BLA) pindvõrdne rööpkülikuga $KLMN$, ning $S_{ABCD} : S_{KLMN} = 5:1$.



Joonis 5

3. *Vastus:* kõik paarisarvud.

Kirjutame ruutudesse arvud nii, nagu joonisel 6 näidatud.



Joonis 6

Siis iga kujundi (A) poolt kaetavates ruutudes asuvate arvude summa on 1 või -1; kujundi (B) korral on see summa 0, sõltumata kujundi paigutusest. Et ruutudes olevate arvude kogusumma on n, siis peame kokku kasutama vähemalt n kujundit. See aga tähendab, et kujundeid (B) ei ole üldse võimalik kasutada. On lihtne veenduda (näiteks alustades katmist ruudustiku mingist nurgast), et kujunditega (A) on võimalik ruudustik katta siis ja ainult siis, kui n on paarisarv.

4. *Vastus:* $f(n) \equiv 1$ ja $f(n) = 2^n$.

   Tingimusest b) saame, et $f(n+1) = f(n)f(1)$ mistahes $n \geqslant 1$ korral, mistõttu $f(n) = \big(f(1)\big)^n$. Olgu $f(1) = k$, siis tingimuse c) kohaselt peab mingi naturaalarvu $n_0 \geqslant 1$ korral kehtima võrdus $k^{k^{n_0}} = (k^{n_0})^2$. See on võimalik vaid siis, kui $k = 1$ või $k^{n_0} = 2n_0$; viimasel juhul peab olema $k = 2$ ja $n_0 = 1$ või $n_0 = 2$. Niisiis on ainsad nõutud omadustega funktsioonid $f(n) \equiv 1$ ja $f(n) = 2^n$.

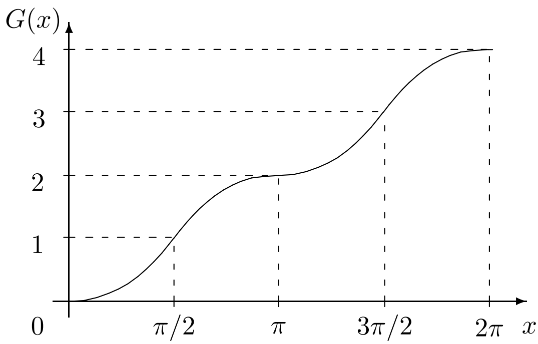
5. Valime kerade S_1 ja S_2 keskpunktideks punktid P_i ja P_j, millevaheline kaugus $d(P_i, P_j)$ on maksimaalne. Kui see kaugus on väiksem kui 1 cm, siis sisalduvad kõik valitud punktid ilmselt kerade S_1 ja S_2 ühisosas. Vastasel korral on vastavalt ülesande tingimusele mistahes $k \neq i, j$ korral kas $d(P_k, P_i) < 1\,\mathrm{cm}$ või $d(P_k, P_j) < 1\,\mathrm{cm}$, s.t. punkt P_k sisaldub vähemalt ühes keradest S_1 ja S_2.

XII klass

1. Integreerides saame

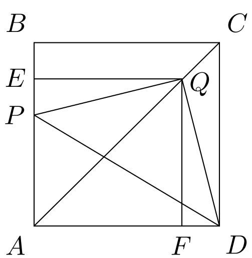
$$G(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x \sin t\,dt = 1-\cos x, & \text{kui } x\in[0,\pi];\\ \int\limits_0^\pi \sin t\,dt + \int\limits_\pi^x (-\sin t)dt = 3+\cos x, & \text{kui } x\in[\pi,2\pi].\end{cases}$$

Funktsiooni $G(x)$ graafik on kujutatud joonisel 7.



Joonis 7

2. *Vastus:* 45°, 45°, 90°.



Joonis 8

Olgu E ja F punkti Q ristprojektsioonid vastavalt külgedele AB ja AD (vt. joonist 8). Et $AE : EB = AF : FD = 4 : 1$, siis $PE = \frac{1}{5}AB = FD$. Seega on täisnurksed kolmnurgad EPQ ja FDQ võrdsed, ning seetõttu $PQ = DQ$ ja $\angle EQP = \angle FQD$, s.t. kolmnurk PQD on võrdhaarne ja täisnurkne.

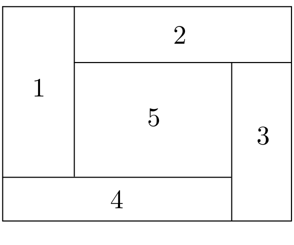
3. *Vastus:* lõpmata palju.

   Võtame $x = 1993$ ja $y = 2 \cdot 1993$, siis iga arv kujul

   $$a_n = (10^{2n+6} \cdot x + y)^2 = x^2 \cdot 10^{4n+12} + 2xy \cdot 10^{2n+6} + y^2\,,$$

   kus $n = 1, 2, \ldots$, on "ilus" (saadakse täisruutude $x^2 \cdot 10^{2n-2}$, $2xy \cdot 10^{2n-2}$ ja y^2 üksteise järele kirjutamisel) ning jagub ilmselt arvuga 1993. Seega on arvuga 1993 jaguvaid "ilusaid" arve lõpmata palju.

4. Lihtne on veenduda, et ristküliku jaotamisel kaheks, kolmeks või neljaks võrdpindseks ristkülikuks on nende seas alati vähemalt kaks võrdset (võime oma arutluses lähtuda sellest, et esialgse ristküliku iga nurk peab olema parajasti ühe tüki nurgaks; kui kaks esialgse ristküliku nurka on ühe ja sama tüki nurkadeks, taandub ülesanne mingi uue ristküliku jaotamisele ühe võrra väiksemaks arvuks tükkideks). Ainus võimalus jaotada ristkülik viieks ristkülikukujuliseks tükiks nii, et ükski paar, kolmik ega nelik neist ei moodustaks ristkülikut, on kujutatud joonisel 9; pindalade võrdlemise teel saame kergesti näidata, et tükid 1 ja 3 ning 2 ja 4 peavad olema võrdsed.



Joonis 9

5. Valime kerade S_1 ja S_2 keskpunktideks punktid P_i ja P_j, millevaheline kaugus $d(P_i, P_j)$ on maksimaalne. Kui see kaugus on väiksem

kui 1 cm, siis sisalduvad kõik valitud punktid ilmselt kerade S_1 ja S_2 ühisosas. Vastasel korral on vastavalt ülesande tingimusele mistahes $k \neq i, j$ korral kas $d(P_k, P_i) < 1\,\mathrm{cm}$ või $d(P_k, P_j) < 1\,\mathrm{cm}$, s.t. punkt P_k sisaldub vähemalt ühes keradest S_1 ja S_2.