# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

29. märts 1993. a.

IX klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Lihtsusta:

$$\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

2. Tõesta, et arv $7^{1993}+1993$ jagub arvuga $100$.

3. Tõesta, et korrapärase kaheksanurga pindala on võrdne tema pikima ja lühima diagonaali pikkuste korrutisega.

4. Milliste reaalarvude $a$ korral on avaldise

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$$

väärtus vähim? Leia see vähim väärtus.

5. Ruut jaotatakse viieks võrdpindseks ristkülikukujuliseks tükiks. Tõesta, et nende tükkide seas võib olla ülimalt üks ruut.

# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

29. märts 1993. a.

X klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia kõik naturaalarvud, mille lõpus on numbrid 93 ja mis pärast nende numbrite kustutamist vähenevad täisarv kordi.

2. Tõesta, et mistahes reaalarvuliste $x$ ja $y$ väärtuste korral kehtib võrratus

$$x(5x+2)+y(4x+y)+5>0\,.$$

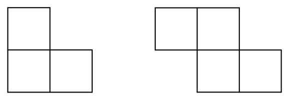
3. Naturaalarvud $m$, $n$ ja $k$ on sellised, et arv $n^m$ jagub arvuga $m^n$ ja arv $k^n$ jagub arvuga $n^k$. Tõesta, et arv $k^m$ jagub arvuga $m^k$.

4. Täisnurkse kolmnurga siseringjoone raadius on $r$ ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on $h$. See kõrgus jaotab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mille siseringjoonte raadiused on vastavalt $r_1$ ja $r_2$. Tõesta, et:

   a) $r_1+r_2+r=h$;

   b) $r_1^2+r_2^2=r^2$.

5. Milliste naturaalarvuliste $n$ väärtuste korral on võimalik ruudustik mõõtmetega $3\times n$ ruutu katta joonisel näidatud kujunditega (mõlemat liiki kujundeid on piisaval arvul)?



# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

29. märts 1993. a.

XI klass

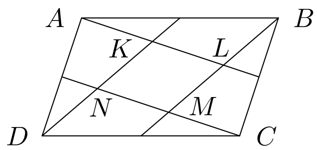
Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Tõesta, et ühegi naturaalarvu $n \geqslant 1$ korral ei saa arvu

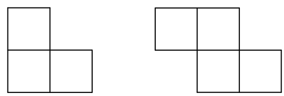
   $$1 + 2 + \ldots + n$$

   viimaseks numbriks olla $2$, $4$, $7$ ega $9$.

2. Rööpküliku $ABCD$ tipud $A$, $B$, $C$, $D$ ühendatakse vastavalt külgede $BC$, $CD$, $DA$ ja $AB$ keskpunktidega. Niiviisi tekkinud lõigud lõikuvad omavahel punktides $K$, $L$, $M$, $N$ (vt. joonist). Leia nelinurkade $ABCD$ ja $KLMN$ pindalade suhe.




3. Milliste naturaalarvuliste $n$ väärtuste korral on võimalik ruudustik mõõtmetega $3 \times n$ ruutu katta joonisel näidatud kujunditega (mõlemat liiki kujundeid on piisaval arvul)?



4. Leia kõik funktsioonid $f(n)$, mille korral on üheaegselt täidetud järgmised tingimused:
   a) mistahes naturaalarvu $n \geqslant 1$ korral on $f(n)$ mingi nullist erinev naturaalarv;
   b) $f(n+m) = f(n)f(m)$ mistahes naturaalarvude $n, m \geqslant 1$ korral;
   c) võrrandil $f\big(f(n)\big) = \big(f(n)\big)^2$ leidub naturaalarvuline lahend $n_0 \geqslant 1$.

5. Ruumis on antud erinevad punktid $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_{1993}$ nii, et ükski kolmik neist ei asu ühel sirgel ja mistahes kolmnurgas $P_iP_jP_k$ leidub külg, mis on lühem kui 1 cm. Tõesta, et leiduvad sellised kerad $S_1$ ja $S_2$ raadiusega 1 cm, et igaüks antud 1993 punktist sisaldub vähemalt ühes neist keradest.

# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA III VOOR

29. märts 1993. a.

XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Skitseeri funktsiooni

$$G(x) = \int_0^x |\sin t|\, dt$$

graafik lõigul $[0, 2\pi]$.

2. Ruudu $ABCD$ küljel $AB$ on võetud punkt $P$ ja diagonaalil $AC$ punkt $Q$ nii, et $AP : PB = 3 : 2$ ja $AQ : QC = 4 : 1$. Leia kolmnurga $PQD$ nurgad.

3. Nimetame naturaalarvu "ilusaks", kui ta on mõne naturaalarvu ruut ja tema üleskirjutus kümnendsüsteemis saadakse kahe või enama naturaalarvu ruudu (mitte $0$) üksteise järele kirjutamisel. (Näiteks arv $169$ on "ilus", sest $169 = 13^2$, $16 = 4^2$ ja $9 = 3^2$.) Kui palju leidub "ilusaid" arve, mis jaguvad arvuga $1993$?

4. Ristkülik jaotatakse viieks võrdpindseks ristkülikukujuliseks tükiks. Tõesta, et nende ristkülikute hulgas leidub vähemalt kaks võrdset (kongruentset).

5. Ruumis on antud erinevad punktid $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_{1993}$ nii, et ükski kolmik neist ei asu ühel sirgel ja mistahes kolmnurgas $P_iP_jP_k$ leidub külg, mis on lühem kui $1$ cm. Tõesta, et leiduvad sellised kerad $S_1$ ja $S_2$ raadiusega $1$ cm, et igaüks antud $1993$ punktist sisaldub vähemalt ühes neist keradest.